1,50 33 Uhd.

Ma

Grundlehren

der

Arithmetik und Algebra,

für

den höheren Schulunterricht

bearbeitet

von

August Uhde,

Dr. phil., Professor der Mathematik und Astronomie am Herzoglichen Collegio Carolino zu Braunschweig und Vorsteher der technischen Abtheilung desselben.

Zweite unveränderte Ausgabe.

Braunschweig,

Verlag der Hofbuchhandlung von Eduard Leibrock.

1850.

Vorwort.

Unter der Menge vorhandener Lehrbücher der Elementar-Mathematik kann ein neues nur durch die Art, wie es den Gegenstand behandelt, sich seinen Platz verdienen wollen. — Den meisten liegt es bloß daran, den Stoff der Wissenschaft in guter Ordnung zusammenzustellen: Wahrheiten mit ihren Beweisen und Regeln mit ihren Gründen werden wie etwas Gegebenes, ohne äußere Verbindung, unter allgemeineren Ueberschriften so an einander gereiht, daß zur Begründung jeder folgenden die vorigen ausreichen. Mag diese Art der Darstellung ihre Vorzüge haben, weder scheint sie mir der Natur des Gegenstandes so angemessen, noch so anziehend, befriedigend und lehrreich zu sein, als diejenige, welche die Wissenschaft aus ihren Grundbegriffen zu entwickeln und mit dem Lernenden nach möglichst einfachem und natürlichem Plane gleichsam nachzuerfinden sucht. Denn es ist gerade die hervorstechendste Eigenthümlichkeit der Mathematik, daß sie ihren Gegenstand nicht aus der Erfahrung holt, sondern aus Grundvorstellungen des Geistes nach allgemeinen Denkgesetzen construirt; die Consequenz ihrer Lehren ist sprüchwörtlich geworden, und die bildende Kraft und der Reiz ihres Studiums entspringen hauptsächlich aus dieser Eigenthümlichkeit. Der einzelne Satz hat für den Schüler nur geringes Interesse; eine Reihe von Sätzen, die ihm ohne Angabe des verknüpfenden Fadens dargeboten werden, muß ihm als ein Aggregat willkürlich geformter und geordneter Behauptungen erscheinen, und das Lernen wird ein bloßes Zugestehen, daß sie wahr seien. Das Werden fesselt die Aufmerksamkeit mehr als das Gewordene, und das Erringen macht mehr Freude als das Errungene. Sicherer wird deßhalb der Unterricht auf die Theilnahme des Schülers rechnen können, der den Gegenstand vor seinen Augen sich naturgemäß entwickeln läßt, und ihm, so weit es angeht, das Ziel zeigt, und den Weg, auf welchem man dahin gelangt. Der Schüler wird ihm williger und leichter folgen, weil er seine Schritte auf ein erkanntes Ziel gerichtet, und dadurch mit einer gewissen Nothwendigkeit bedingt sieht, — wie man der Erklärung einer Maschine leichter folgt, wenn man ihren Zweck kennt und auf denselben Form und Anordnung der Theile zu beziehen weiß; — er wird sich unwillkürlich aufgefordert finden, jeden nächsten Schritt vorauszuthun, und jeder neuen Einsicht so als einer selbsterworbenen sich erfreuen. Ein vereinzelter Satz wird leicht vergessen, nicht so leicht die Idee, aus welcher eine ganze Folge von Sätzen sich organisch entwickelt, und man hat mehr gelernt, wenn man richtig mathematisch denken, als wenn man mathematische Sätze gelernt hat.

Eine achtjährige Erfahrung im Unterrichten (an zwei Gymnasien, einem Schullehrer-Seminar und der hiesigen höheren technischen Lehranstalt) hat mich in diesen Ansichten bestärkt; an Lehrbüchern, die denselben entsprächen, schien mir noch kein Ueberfluß zu sein, obwohl man immer allgemeiner auf die Anwendung der heuristischen Methode im mathematischen Unterrichte dringt, und so entschloß ich mich zu dieser neuen Bearbeitung der Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Wie schwierig indessen eine solche Bearbeitung sei, die den aufgestellten Anforderungen genügen, und dabei Klarheit mit der nöthigen Kürze verbinden soll, bekenne ich offen, nicht eher gewußt zu haben, als bis ich sie selbst versucht habe. Ob diese Schwierigkeiten bloß für mich bestanden haben, und wie weit es mir gelungen sei, dieselben zu besiegen, muß ich natürlich Anderen zu beurtheilen lassen.

Ueber Plan und Anordnung des Buchs im Einzelnen hätte ich mehr zu sagen, als in eine Vorrede gehört; ich muß ihm deßhalb seine Rechtfertigung in dieser Hinsicht schon selbst überlassen. Der sechste und dreizehnte Abschnitt dürften die Eigenthümlichkeit der erstrebten Darstellungsweise am klarsten hervortreten lassen.

Im Allgemeinen bin ich Thibaut's, meines unvergeßlichen Lehrers, „Grundriß der reinen Mathematik ꝛc." (5te Aufl., Göttingen 1831) gefolgt; die Abweichungen von demselben wurden größtentheils durch die verschiedene Bestimmung des Buchs geboten.

Die Grundzüge der Lehre von den Kettenbrüchen und der unbestimmten Analytik habe ich ausgelassen, weil sie meines Bedünkens in einen eigenen Abschnitt der Arithmetik, die sogenannte Zahlenlehre, gehören, und jeder Lehrer so viel davon, als ihm zweckmäßig erscheint, auch ohne durch das Lehrbuch unterstützt zu werden, am geeigneten Orte einschalten kann. Weßhalb der binomische Lehrsatz und die Lehre von den cubischen und biquadratischen Gleichungen nicht mit aufgenommen sind, ist S. 316 u. 378 angegeben. Auch die Lehre von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die Methoden der genäherten Auflösung der Gleichungen höheren Grades bleiben meiner Ansicht nach zweckmäßiger der höheren Arithmetik vorbehalten. Ueberhaupt glaube ich nicht, daß das Heil des mathematischen Unterrichts auf Schulen in der größtmöglichen Erweiterung seines Gebiets zu suchen sei.

Das Lehrbuch setzt, wie Jeder sieht, in dem gewöhnlichen Zahlenrechnen schon unterrichtete Schüler voraus. Um diesen den dritten Abschnitt, welcher von dem Rechnen mit künstlich gebildeten Zahlen handelt, interessanter zu machen, habe ich zugleich auf das Rechnen mit Zahlen aus anderen als dem dekadischen Systeme Rücksicht genommen und die Grundregeln für das Rechnen mit genäherten Zahlen mit hineingezogen. Die durchgängige Berücksichtigung des letzteren Gegenstandes, so wie die Ausführung einer Menge von Beispielen, zumal für die Auflösung algebraischer Gleichungen, mag zum Beweise dienen, daß ich den practischen Zweck über dem rein wissenschaftlichen nicht aus dem Auge verloren habe.

Eigene schriftliche Ausarbeitungen sind dem Schüler, der sicher in der Mathematik fortschreiten will, nicht zu erlassen. Als Anleitung zu denselben habe ich nach des verdienten E. G. Fischer's Vorgange dem Texte Fragen und Aufgaben beigefügt. Machten nicht andere Unterrichtszweige gewöhnlich ähnliche und größere Anforderungen an den Privatfleiß des Schülers, so würden solche Ausarbeitungen in noch ausgedehnterem Maße von ihm zu verlangen sein. Uebrigens wird der Lehrer diese Aufgaben leicht erweitern und mannigfaltig abändern können.

Sollten auch andere Lehrer dieses Lehrbuch ihrem Unterrichte zum Grunde legen, so würde ich dadurch in meinem Vorhaben bestärkt werden, als zweiten Theil die Grundlehren der Geometrie und ebenen Trigonometrie nach denselben Grundsätzen zu bearbeiten. Die Verzögerungen jedoch, welche das Erscheinen dieses Theils erfahren hat, machen mich bedenklich, den Zeitpunct des Erscheinens eines zweiten im Voraus anzukündigen.

Braunschweig, im Februar 1838.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite.

Einleitung.

§. 1.

Begriff der Grösse.

Die Merkmale, aus welchen unsere Vorstellungen und Begriffe von Gegenständen zusammengesetzt sind, beziehen sich entweder auf die Beschaffenheit, Qualität, oder auf die Größe, Quantität, derselben. In der Vorstellung einer Linie z. B. betrifft das Merkmal, ob sie gerade oder krumm ist, ihre Beschaffenheit, das Merkmal der Länge dagegen ihre Größe. Werden Dinge in Absicht auf ihre Beschaffenheiten oder Eigenschaften mit einander verglichen, so werden sie, jenachdem diese übereinstimmen oder verschieden sind, gleichartig oder ungleichartig genannt. So sind z. B. gerade Linien gleichartige, gerade und krumme dagegen ungleichartige. Hinsichtlich ihrer Größe können aber nur gleichartige Dinge, oder in so fern sie als gleichartig gedacht sind, mit einander verglichen werden und heißen in dieser Beziehung als übereinstimmend gleich, als verschieden von einander ungleich. Die Gleichheit oder Ungleichheit gerader Linien z. B. hängt bloß von ihrer Länge ab, und auch gerade und krumme Linien können hinsichtlich ihrer Größe mit einander verglichen werden, sobald man dabei nur das eine Merkmal ihrer Ausdehnung in die Länge berücksichtigt. Denn in diesem Falle werden dieselben bloß als Linien, ohne die Nebenbestimmung, ob sie gerade oder krumm sind, folglich als gleichartig gedacht.

So verschiedenartig aber die Dinge an sich sind, denen wir Größe beilegen, auf so verschiedenartige Eigenschaften derselben bezieht sich auch das Merkmal ihrer Größe. Die Größe einer Linie z. B. besteht bloß in ihrer Länge, die Größe eines Gartens in seiner Ausdehnung nach Länge und Breite zugleich, eines Gewichtes in der Stärke des Druckes, den es auf eine Unterlage ausübt, eines Heeres in der Menge von Soldaten u. s. w. Ja auch einem und demselben Dinge kann in Beziehung auf verschiedenartige Beschaffenheiten desselben Größe beigelegt werden. So kann z. B. die Größe eines Metallstücks nach seinem räumlichen Inhalte oder nach seinem Gewichte, die Größe einer Stadt nach ihrer Flächenausdehnung oder nach der Zahl ihrer Häuser oder Einwohner geschätzt werden u. dergl. m.

Statt der hier gewählten sind andere Beispiele auszuführen.

Was nun in allen diesen Fällen unter dem Wort Größe oder Quantität verstanden wird, lässt sich nicht weiter erklären oder durch allgemeinere und einfachere Begriffe bestimmen. Der Begriff Größe ist vielmehr selbst schon ein einfacher oder ein Grundbegriff, der Niemandem fehlt und unmittelbar durch die Vorstellung eines Gegenstandes, welcher Größe besitzt, deutlich wird.*)

Insofern bloß das Merkmal der Größe (quantitas) eines Dinges in Betracht kommen soll, nennt man dieses auch wohl selbst eine Größe (quantum).

*) Es ist hier, in einem Schulbuche, begreiflich der Ort nicht, die obige Behauptung zu rechtfertigen, obschon sie dessen, den in vielen Lehrbüchern an die Spitze gestellten Definitionen des Begriffes Größe gegenüber, wohl bedürfte. Die gewöhnliche Erklärung, »Größe ist, was sich vermehren oder vermindern lässt,« umfasst mehr, als sie soll, indem z. B. auch Kenntnisse, moralischer und politischer Einfluß und dergl. Dinge mehr, die doch gewiß keine Quantität besitzen, sich vermehren oder vermindern lassen, und setzt stillschweigend auch schon den zu erklärenden Begriff voraus, indem an ein Mehr oder Weniger nur erst bei der Vergleichung von wenigstens zwei gleichartigen Dingen zu denken ist, die mithin in der Vorstellung ihres Verhältnisses selbst schon als bekannt, d. h. in diesem Falle als Größen oder Größe habend gedacht werden. Der zweite Vorwurf trifft auch die Erklärung, »Größe ist Alles, was sich messen läßt.« — Mag indessen der Lehrer hiervon so viel erwähnen, als er der Fassungskraft und dem Bedürfnisse seiner Schüler angemessen findet.

Der Unterschied in dem zwiefachen Gebrauche des Wortes Größe für quantitas und quantum ist an Beispielen zu zeigen.

Das Wort Größe im Deutschen wird aber auch noch in anderem Sinne gebraucht. Man legt nämlich einem Dinge Größe bei, nennt es groß, wenn es andere, und zwar die gewöhnlichen seiner Art in irgend einer Beziehung mehr oder weniger übertrifft. In diesem Sinne wird das Merkmal der Größe, als ein relatives, welches einem Dinge nur vergleichungsweise oder im Verhältniß zu anderen zukommt, auch auf nicht sinnliche Gegenstände übertragen. Im Lateinischen hat man für diesen Begriff das Wort magnitudo.

Zur Erläuterung des Unterschiedes zwischen den beiden Bedeutungen des Wortes Größe als quantitas und magnitudo Beispiele, wie die folgenden: Seelengröße; Größe eines Feldherrn — eines Heeres; die Größe des russischen Reiches wird auf mehr als 375000 Quadratmeilen angegeben — giebt zu manchen Besorgnissen Veranlassung etc.

Wenn in der Folge von der Größe eines Dinges die Rede ist, so soll darunter immer die Quantität desselben gemeint sein. Diese, oder die Dinge, welche Größe besitzen, nur in Beziehung auf dieses Merkmal, und deren besondere Eigenthümlichkeiten, nur in sofern von denselben ihre Größe abhängt, machen den Gegenstand der Mathematik (von $\mu\acute{\alpha}\vartheta\eta\mu\alpha$) aus, welche daher auch wohl die Wissenschaft der Größen oder Größenlehre genannt wird.

§. 2.

Stetige und unstetige Grössen.

Obgleich nun keine Erklärung des Begriffs Größe, welche alle Arten von Größen unter sich faßte, gegeben werden kann, so findet sich doch ein Merkmal, welches allen ohne Ausnahme zukommt. In jeder Größe lassen sich nämlich gleichartige Theile unterscheiden, in welche dieselbe zerlegt, oder aus denen sie zusammengesetzt gedacht werden kann.

Werden solche Theile in der Vorstellung einer Größe völlig unbestimmt gelassen, so daß diese willkürlich und ins Unendliche fort in kleinere Stücke zerlegt werden kann, so heißt sie eine stetige oder continuirliche (continuus). Die Länge einer Linie, eines Zeitraumes, die Ausdehnung einer Fläche u. s. w. sind Beispiele solcher Größen. Ihre Theile hängen ununterbrochen zusammen, so daß je zwei benachbarte eine gemeinschaftliche Grenze haben.

Liegt dagegen schon im Begriffe der Größe die Vorstellung einer bestimmten Zerlegung in Theile, welche als getrennt für sich bestehend, dem Wesen nach gleich und nicht weiter zerlegbar gedacht werden, so heißt die Größe eine unstetige oder discrete (von discerno). Dahin gehören z. B. die Größe eines Heeres, welches aus Soldaten, eines Waldes, der aus Bäumen znsammengesetzt ist u. dergl. m. Die Menge ihrer (als gleich gedachten) Theile bestimmt die Größe solcher Dinge, und schon diese Menge an sich, abgesehen von der Art und Größe der einzelnen Theile, kann als Größe gedacht werden.

Offenbar können auch die stetigen Größen als unstetige dargestellt werden, wenn man für dieselben eine bestimmte Eintheilung vorschreibt, so z. B. wenn man die stetige Länge eines Tisches zu zwölf Fuß, eines Tages zu vier und zwanzig Stunden angiebt u. dergl. m. Was daher von unstetigen Größen gilt, lässt sich überhaupt auf alle Arten von Größen anwenden.

Die Begriffe stetiger und unstetiger Größen sind mit verändertem Ausdruck an andern Beispielen zu erläutern.

Muß sich die verlangte Gleichheit der Theile unstetiger Größen auf alle Merkmale ohne Ausnahme erstrecken? — oder auf welche? — Beispiele.

§. 3.

Begriff der Mathematik. — Theile derselben.

Nach dieser vorläufigen Darstellung des Gegenstandes der Mathematik lässt sich dieselbe, wenigstens in allgemeinen Umrissen, definiren als diejenige Wissenschaft, deren Aufgabe es ist, die wesentlichen Eigenschaften aller Arten von Größen, die Gesetze ihres Zusammenhanges und die Regeln ihrer Verbindung und Trennung zu entwickeln.

Betreffen diese Lehren bloß die allgemeinen und reinen (abstracten) Vorstellungen von Größen, ohne Rücksicht auf Gegenstände und Aufgaben der Wirklichkeit, so machen sie den Inhalt der sogenannten reinen Mathematik aus. Untersuchungen und Vorschriften dagegen, welche den Zusammenhang und die Gesetze bestimmter Classen wirklicher Größen und sie betreffende Aufgaben zum Gegenstande haben, gehören der angewandten Mathematik an. Ein großer Theil von den Lehren der Bauwissenschaft, der praktischen Mechanik, der Astronomie, Physik, Krystallkunde und anderer Naturwissenschaften ist hierher zu zählen. Die vorliegende Schrift hat es nur mit der reinen Mathematik zu thun, welche die Grundlage für alle Theile der angewandten bildet.

Der Gegensatz zwischen Elementar- und höherer Mathematik beruht auf der an sich willkürlichen Unterscheidung der einfacheren und leichteren von den zusammengesetzteren und schwierigeren Lehren, welche von diesen Theilen der Wissenschaft behandelt werden.

Wichtiger ist die Eintheilung der reinen Mathematik, welche sich auf die vorhin erörterte Unterscheidung stetiger und unstetiger Größen gründet. Derjenige Theil nämlich, welcher sich mit den zuletzt genannten Größen beschäftigt, führt den Namen der Arithmetik. Sie ist zufolge der Bemerkung, daß alle Größen ohne Ausnahme unter der Form discreter gedacht werden können, der allgemeinste und wichtigste Theil der Mathematik. Unter den stetigen und continuirlichen Größen aber verdient eine besondere Classe, die der räumlichen Größen, wie Linien, Winkel, Figuren, Flächen und Körper, ausgezeichnet zu werden; diese machen den Gegenstand der Geometrie aus. Sie ist die Grundlage aller derjenigen Wissenschaften, welche es mit Constructionen im Raume zu thun haben — auch der Mechanik oder reinen Bewegungslehre (Phorometrie), welche diese Constructionen in gesetzmäßiger Abhängigkeit von der darüber verfließenden Zeit betrachtet.

Grundlehren

der

Arithmetik.

Erstes Hauptstück.

Die Lehre von den arithmetischen Grundoperationen.

Erster Abschnitt.

Grundbegriffe von den Zahlen und ihren Arten, nebst den Regeln ihrer künstlichen Bildung und Bezeichnung.

---

§. 1.

Vielfaches, aliquoter Theil. — Begriff der Zahl. — Einheit. — Verhältniss. — Benannte und unbenannte Zahlen.

I. In der Vorstellung einer unstetigen Größe werden, der früheren Erklärung zufolge, getrennt für sich bestehende Theile gedacht, welche entweder vollkommen gleich sind oder doch in Beziehung auf ihre wesentlichen Merkmale als gleich angenommen werden. Unter dieser Voraussetzung nennt man das Ganze ein Vielfaches eines solchen Theils und jeden derselben einen aliquoten Theil des Ganzen. Ein Heer ist das Vielfache eines Soldaten, und dieser ein aliquoter Theil des Heeres; ein Fuß oder zwölf Zolle das Vielfache eines Zolles, und dieser ein aliquoter Theil des Fußes u. s. w.

Andere Beispiele.

Beide Begriffe beziehen sich wechselsweise auf einander (Wechsel- oder reciproke Begriffe); man kann daher aus der Vorstellung des einen Dinges mittelbar die des andern erzeugen. Durch Wiederholung der Vorstellung eines Einzeldinges bildet sich der Begriff eines Vielfachen desselben, und durch Zerlegung einer Größe in lauter gleiche Theile der eines aliquoten Theils. Denkt man sich einen solchen selbst wieder mehre Male wiederholt, so vereinigt man offenbar nur die beiden vorigen Begriffe in der Vorstellung des Vielfachen eines aliquoten Theils.

c — d
a — — — — — b
e — — — f

So erhält man z. B. durch Wiederholung des Striches cd das Vielfache desselben ab, oder umgekehrt durch die angegebene Zerlegung von ab den aliquoten Theil desselben cd; ein anderes Vielfaches von cd, z. B. ef, ist in Beziehung auf ab das Vielfache eines aliquoten Theils desselben.

Anderes Beispiel.

2. *Die bestimmte Angabe, wie oft ein Ding wiederholt, oder in wie viele gleiche Theile dasselbe zerlegt und wie oft ein solcher zu denken ist, heißt eine Zahl.*

3. Die Zahl nimmt also irgend ein Etwas als gegeben und bekannt an und bestimmt nur die Art der Wiederholung oder Eintheilung oder beider Verrichtungen zugleich, welche mit demselben vorgenommen werden sollen. Jenes Etwas aber, von welchem die Zahlenbildung ausgeht, wird ohne Rücksicht auf seine besondere Beschaffenheit allgemein die *Einheit* der Zahl genannt.

Bei wirklich discreten Größen ist die Einheit durch die Natur derselben ohne Wahl vorgeschrieben; bei den continuirlichen aber, welche nur als discrete dargestellt werden sollen, nach Willkür oder Bedürfniß anzunehmen.

B.*)

4. Dadurch nun, daß die Zahl ein zweites Ding als ein bestimmtes Vielfaches, einen aliquoten Theil, oder als Vielfaches eines aliquoten Theils dieser Einheit darstellt, erhält man auch eine völlig bestimmte Vorstellung von der Größe dieses zweiten Dinges — vorausgesetzt, wie es immer geschieht, daß die Einheit bekannt sei.

*) B. bedeutet in der Folge immer Beispiel, welches der Schüler auszuführen hat.

Eben deshalb aber bleibt diese Größenbestimmung durch eine Zahl immer nur mittelbar. Sie setzt voraus, daß das eine Ding, dessen Größe bestimmt werden soll, mit einem andern seiner Art (der Einheit) verglichen, oder da diese Vergleichung nur die Größe betrifft, durch dasselbe (als Maß) gemessen sei. Der Zweck und das Ergebniß dieser Vergleichung oder Messung, hier die Angabe, wie durch Wiederholung oder Eintheilung eines Dinges oder durch Beides zugleich die Größe eines andern gleicher Art erzeugt werden könne, ist das Verhältniß des zweiten zum ersten. Ein solches auf unzweideutige Art zu bezeichnen, dient die Zahl. Die Zahl ist also — kürzer erklärt als vorhin — Ausdruck des bestimmten Verhältnisses einer Größe zu ihrer (gleichartigen) Einheit.

Man erhält deshalb durch die Zahl erst dann eine vollständige Vorstellung von der Größe des bezeichneten Dinges, wenn man auch die Einheit kennt, auf welche sich die Zahl bezieht.

Erläuterung durch eine Zahlenangabe nach ungewöhnlicher, etwa ausländischer Maß-, Münz- oder Gewichts-Einheit.

5. Wird einer Zahl der Name ihrer Einheit ausdrücklich hinzugefügt, so heißt sie eine benannte, z. B. drei Ruthen, drei Fuß, drei Zoll u. s. w.; bleibt hingegen die Einheit der Zahl völlig unbestimmt, so daß man sich unter derselben nur irgend ein beliebiges Etwas vorzustellen hat, so heißt die Zahl unbenannt, z. B. drei.

Aendert sich die Größe einer Zahl, wenn man ihr, wie im angegebenen Beispiele, verschiedene Benennungen giebt? Worauf aber haben dieselben Einfluß?

§. 2.

Ganze und gebrochene Zahlen.

1. Der Begriff des Verhältnisses zwischen zwei gleichartigen Größen beruht nach der vorigen Erklärung auf der zwiefachen Vorstellung, daß man immer die eine als Vielfaches, oder, in umgekehrter Beziehung, als aliquoten Theil der anderen ansieht. Denn in dem Falle, daß eine Größe als ein Vielfaches von dem aliquoten

Theile einer anderen zu denken ist, sind nur diese beiden einfachen Beziehungen zusammengesetzt. Hiernach zerfallen die Zahlen, als bestimmte Angaben der Verhältnisse, in welchen mittelbar dargestellte Größen zur Einheit stehen, von selbst in zwei Classen.

2. Bezeichnet eine Zahl bloß die mehrmalige Wiederholung der ungeänderten (ganzen) Einheit, oder ein bestimmtes Vielfaches derselben, so heißt sie eine ganze Zahl.

So wird in dem vorhin (§. 1. 1.) gebrauchten Beispiele das Verhältniß von ab zu cd durch die ganze Zahl »fünf« ausgedrückt, oder ab ist das Fünffache von cd.

3. Verlangt im Gegentheil die Zahl Zerlegung der Einheit in eine bestimmte Menge gleicher Theile und ein- oder mehrmaliges Setzen eines solchen Theils, so heißt sie eine gebrochene oder ein Bruch.

So wird in dem vorigen Beispiele cd im Verhältniß zu ab durch die gebrochene Zahl »ein Fünftel«, und ef, gleichfalls in Beziehung auf ab, durch den Bruch »drei Fünftel« ausgedrückt.

4. Jede der beiden Angaben, welche der Bruch in sich vereinigt, erfordert, wie schon aus den eben genannten Beispielen erhellt, eine ganze Zahl. Die eine, welche angiebt, in wie viele gleiche Theile die Einheit zerlegt zu denken ist, heißt der Nenner des Bruchs, und erhält, um diese Bedeutung zu erlangen, die Anhängesylbe »tel« oder »stel« (von Theil). Aus »fünf« wird »Fünftel« u. s. f.

Die andere, welche anzeigt, wie viele solcher Theile die darzustellende Größe enthält, heißt der Zähler des Bruchs, und wird dem Nenner vorangestellt. »Drei« ist der Zähler des Bruchs »drei Fünftel« u. s. f.

Wie werden die Brüche benannt, deren Nenner zwei oder drei ist? Muß nothwendig die Größe, welche durch einen Bruch ausgedrückt werden soll, kleiner sein als die Einheit? Wann aber ist zu ihrer Bezeichnung schlechterdings ein Bruch erforderlich?

5. Die Brüche selbst theilt man wieder ein in echte, oder solche, welche weniger als die Einheit, und unechte, oder solche, welche eben so viel oder mehr als die Einheit oder ein Ganzes bedeuten.

B. — Wie können diese Erklärungen auch in Beziehung auf das Verhältniß des Zählers zum Nenner ausgedrückt werden?

Einen Bruch, dessen Zähler eins ist, nennt man auch wohl einen Stammbruch und die Verbindung einer ganzen und gebrochenen Zahl eine gemischte. B.

6. So wie man nach dem Vorhergehenden nur für die verschiedenen ganzen Zahlen ursprünglicher Namen bedarf, so hat man auch nur für sie eigenthümliche Schriftzeichen, die sogenannten Ziffern, eingeführt. Die Zahl »fünf« z. B. wird durch die Ziffer 5 bezeichnet, »drei« durch 3 u. s. w. Aus diesen wird das Zeichen eines Bruchs zusammengesetzt, indem man die Ziffer des Zählers über die des Nenners setzt und beide durch einen Querstrich trennt. Der Bruch »drei Fünftel« z. B. wird $\frac{3}{5}$ geschrieben.

§. 3.

Begriff der Arithmetik.

Die Wichtigkeit, ja die Unentbehrlichkeit der Zahlen, um Größen zu erkennen und zu beurtheilen, leuchtet ein, wenn man erwägt, erstens, daß sie uns der unmittelbaren Anschauung überheben, um bestimmte Vorstellungen von Größen aller Art zu erhalten, sobald man nur die Einheit oder das Maß derselben kennt, und ferner, daß unser Urtheil über Größen weniger diese an sich, als vielmehr ihre gegenseitigen Verhältnisse betrifft, welche eben durch Zahlen ausgedrückt werden. Manche Größen vermögen wir gar nicht sinnlich anzuschauen, wie unter andern die Ausdehnungen unserer Erde, die Entfernungen verschiedener Weltkörper von einander u. dgl. m. Wir erhalten aber einen deutlichen Begriff von denselben, wenn wir erfahren, wie viel Mal sie eine uns bekannte Größe derselben Art, die Einheit oder das Maß, enthalten, wie viele Meilen z. B. jene Ausdehnungen und Entfernungen betragen. Andere Größen aber, auch wenn sie unmittelbar sinnlich wahrgenommen werden können, lassen sich dennoch viel schärfer auffassen und bestimmter mit einander vergleichen, wenn wir sie durch Zahlen in Verhältniß zu bekannten, leicht übersehbaren Einheiten angeben. Man denke sich z. B., wie unbestimmt die Vorstellung von der Größe eines Stücks Tapeten und der Wände eines Zimmers bleibt, die etwa damit überzogen werden sollen, auch wenn wir Beides, die Tapeten und das Zimmer, vor uns sehen; wie klar und vollendet dagegen unsere Kenntniß beider Größen wird, wenn sie durch Zahlen nach Quadratellen, Quadratfußen oder sonst einem anderen Maße angegeben werden.

Andere Beispiele.

Den größten Werth und die umfassendste Bedeutung für die Größenwissenschaft erlangen die Zahlen aber erst dadurch, daß alle Beziehungen und Verhältnisse, welche unter den Größen selbst Statt finden, auch auf die Zahlen übertragen werden können, durch welche dieselben dargestellt werden. Insofern machen die Zahlen den eigentlichen Gegenstand desjenigen Theils der reinen Mathematik aus, welcher von den unstetigen Größen handelt und schon in der Einleitung (§. 3.) unter dem Namen der Arithmetik (von ἀριθμός) erwähnt ist.

Die Arithmetik ist also die Wissenschaft, welche die Bildung und Bezeichnung der Zahlen, so wie die möglichen Arten, Gesetze und Regeln ihrer Verknüpfung kennen lehrt.

Als Theil der reinen Mathematik beschränkt sie sich darauf, die Gesetze und Regeln der Zahlenverknüpfungen nur für unbenannte Zahlen zu entwickeln. In der Anwendung auf benannte Zahlen werden nicht diese Regeln selbst, sondern nur die Umstände, unter denen sie zur Ausführung kommen, abgeändert.

§. 4.

Zählen; künstliches — Einheiten höherer Ordnung. — Grundzahl. — Zahlensystem; dekadisches. — Einerzahlen.

Das erste Geschäft der Arithmetik ist also, die Bildung, Benennung und Bezeichnung der Zahlen kennen zu lehren. — Numeration. — Dieses Geschäft wird dadurch sehr vereinfacht, daß man nur nöthig hat, die Namen und Zeichen der ganzen Zahlen zu kennen, weil aus ihnen die Namen und Zeichen der gebrochenen Zahlen auf die früher (§. 3.) angezeigte Art zusammengesetzt werden.

1. Alle Zahlenbildung aber geht von dem Setzen der Einheit aus, was die Zahl eins bezeichnet.

Wie ist die Zahl eins von der Einheit verschieden?

Durch Hinzufügen derselben Einheit zu der vorigen entsteht die nächste ganze Zahl zwei; — wenn zu diesen beiden abermals eine neue Einheit hinzukommt, die Zahl drei, und so fort die bekannte Reihe der ganzen Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung, indem sich mit dem Inbegriff aller vorigen stets eine neue Einheit vereinigt. In der fortschreitenden Auffassung und Benennung jeder so erhaltenen Menge besteht das Zählen.

Je weiter man damit fortschreitet, desto größer wird die erhaltene Zahl, und da man ins Unendliche weiter zählen, oder jede denkbare Menge durch Hinzunehmen neuer Einheiten noch vermehren kann, so giebt es keine größte Zahl.

2. Wollte man jedoch auf dem angedeuteten Wege ins Unbestimmte fort jede neu aufgefasste Menge mit einem eigenen Namen und demnächst auch mit einem eigenen Zeichen versehen, so würde das ohnehin schon einförmige Geschäft des Zählens bald eins der schwierigsten und unerträglichsten werden. Auch die lebhafteste Einbildungskraft und das treueste Gedächtniß würden ermüden, eine kaum für die einfachsten Bedürfnisse ausreichende Menge besonderer Vorstellungen, Namen und Zeichen, und diese alle in gehöriger Ordnung, festzuhalten. Man verfährt also, um bei fortgesetztem Zählen auch größere Mengen leicht zu übersehen und zu unterscheiden, auf folgende Art.

Man zählt immer nur bis zu einer bestimmten, leicht übersehbaren Menge, so oft man diese erhalten hat, den Act des Zählens von Neuem anfangend. Die etwa übrig bleibende, geringere Zahl von Einheiten wird besonders bemerkt. Alsdann fasst man in Gedanken jede abgesonderte Menge als etwas Einfaches zusammen und zählt nur die Menge dieser Abtheilungen, deren jede gleich viel Einheiten in sich begreift.

Würde die Zahl jener Abtheilungen und Gruppen selbst wieder zu groß, um noch leicht übersehbar zu bleiben, so verfährt man mit ihnen auf gleiche Weise, wie vorhin mit den ursprünglichen Einheiten. Man nimmt ihrer wieder je eine bestimmte, gleich bleibende Menge zusammen, merkt die Zahl der übrig bleibenden, welche keine solche Zusammenfassung mehr gestatten, besonders an, und zählt jede Abtheilung der neuen Art wieder als ein Einfaches höherer Ordnung.

Die folgerechte Anwendung desselben Verfahrens, wodurch man zu Abtheilungen oder Zusammenfassungen stets größerer Mengen ursprünglicher Einheiten aufsteigt, macht das Wesen der künstlichen Zahlenbildung aus.

3. Auch diesen allmählig auf einander folgenden Inbegriffen ursprünglicher Einheiten hat man, insofern auch sie als einfache Dinge gezählt werden, den Namen Einheiten gegeben. Zum Unterschiede von den ursprünglichen aber nennt man sie Einheiten höherer Ordnung oder höheren Ranges. So erhält man Einheiten erster Ordnung durch die erste Zusammenfassung ursprünglicher Einheiten; Einheiten zweiter Ordnung, wenn man gewisse Mengen von Einheiten der ersten Ordnung selbst wieder in einen Inbegriff vereinigt denkt, u. s. f.; Einheiten dritter, vierter, fünfter und noch höherer Ordnung, wenn man je eine bestimmte Anzahl von Einheiten der vorhergehenden Ordnung wieder in Eins zusammenfasst.

Größere Zahlen setzen sich also nach der vorhin beschriebenen Art zu zählen aus lauter kleineren zusammen, welche angeben, wie viele Einheiten jeder Ordnung vorhanden sind. Die Menge solcher Einheiten irgend einer Ordnung muß offenbar immer geringer bleiben, als die Zahl eben solcher Einheiten, welche als ein Eins nächst höheren Ranges gezählt werden sollen. Man braucht folglich nur diese kleineren Mengen aufzufassen und zu benennen, muß aber außerdem angeben, was für Einheiten jeder Theil der Zahl enthält.

4. Diese zweite Forderung stimmt damit überein, daß man wisse, wie viele ursprüngliche Einheiten jede Einheit höherer Ordnung unter sich begreift. Um dazu so einfach wie möglich zu gelangen, setzt man fest, daß immer dieselbe Menge von Einheiten einer niedrigeren Ordnung als eine der nächst höheren Ordnung zusammengefasst werden solle. Die Zahl, welche diese Menge bestimmt, heißt die Grundzahl der künstlichen Zahlenbildung.

5. Zahlen, welche auf die bisher beschriebene Art nach derselben Grundzahl gebildet sind, machen zusammen ein Zahlensystem aus.

6. Die gebildeten Völker der Erde haben übereinstimmend die Zahl zehn als Grundzahl ihres Systems angenommen, welches daher das dekadische (δεκάς — άδος) oder Decimal-System genannt wird.

7. In diesem hinlänglich bekannten Zahlensysteme braucht man nur für die ersten zehn ganzen Zahlen, welche ursprüngliche Einheiten zählen, und für die auf einander folgenden Einheiten höherer Ordnung eigenthümliche Namen zu wählen. Die Zahlen unter zehn, in jedem anderen Zahlensysteme die Zahlen kleiner als die willkürlich angenommene Grundzahl, heißen Einerzahlen. Mit ihnen lässt sich jede Menge von Einheiten beliebigen Ranges bezeichnen, da dieselbe stets kleiner bleiben muß, als die Grundzahl. Der Name der gezählten Einheit wird dem ihrigen angehängt. Durch gehörige Verbindung dieser Namen lässt sich jede gegebene Menge bestimmt ausdrücken.

8. Uebrigens entspricht einem vorwärts gerichteten Zählen, welches allmählig zu größeren Mengen und Zahlen aufsteigt, auch ein umgekehrtes, welches rückwärts von größeren Zahlen durch allmähliges Wegnehmen je einer Einheit zu kleineren Zahlen übergeht.

Die Grundidee der künstlichen Zahlenbildung ist auch in den gemeinen Maß-, Gewichts-, Geldsystemen u. dergl. nachzuweisen; — zugleich ihr Unterschied von dem regelmäßigen Zahlensysteme anzugeben.

Welchen Grund hat wahrscheinlich die Annahme der Zahl zehn zur Grundzahl unseres Zahlensystems?

Wie heißen die Einerzahlen des dekadischen Systems? ferner die Einheiten erster, zweiter, dritter u. s. w. bis sechster Ordnung? Welche von diesen Namen sind selbst schon, und wie werden sie ferner zur Bezeichnung der Einheiten noch höheren Ranges bis zur zwölften Ordnung (Billion) zusammengesetzt?

Wie werden die nächsten zehn Zahlen über zehn gebildet?*) und wie

*) Die Zahlwörter eilf und zwölf sind aus den altdeutschen ein-lif und zwei-lif zusammengezogen, welche so viel bedeuten, als eins, zwei über hinaus (lif), nämlich über die erste (dekadische) Zusammenfassung ursprünglicher Einheiten.

werden die Namen der Einerzahlen mit den Benennungen der Einheiten höherer Ordnung zusammengesetzt? Mit wie vielen ursprünglichen Namen bezeichnet man also jede denkbare Menge unter der Billion?

In welcher Ordnung spricht man die Namen der einzelnen Theile einer zusammengesetzten dekadischen Zahl aus?

Welchen Einfluß würde es auf die Darstellung einer und derselben Menge haben, wenn man die Grundzahl größer oder kleiner als zehn annähme? und welche Zahl wäre die kleinste, deren man sich als Grundzahl zur künstlichen Zahlenbildung bedienen könnte?

§. 5.

Künstliches Zahlenschreiben.

Die Bezeichnung nach den Regeln eines Zahlensystems zusammengesetzter ganzer Zahlen schließt sich den Gesetzen ihrer Bildung genau an und ist ein unübertroffenes Muster sinnreicher Kürze. Zunächst ist diese Bezeichnung freilich nur für dekadisch gebildete Zahlen erfunden, weil sie die einzigen sind, welche wirklich gebraucht werden. Es ist indessen leicht, die dafür beizubringenden Regeln so allgemein zu stellen, daß dieselben auch auf Zahlen jedes andern Systems mit beliebiger Grundzahl passen, wobei die dekadischen als Beispiel dienen mögen.

Der Hauptsache nach besteht nun diese kunstreiche und jetzt allgemein übliche Methode des Zahlenschreibens in Folgendem.

1. Man bezeichnet nur jede Einerzahl des Systems mit einer besonderen Ziffer.

Diese Zeichen für die Einerzahlen des dekadischen Systems (von eins bis neun) sind bekanntlich

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
eins,	zwei,	drei,	vier,	fünf,	sechs,	sieben,	acht,	neun.

Man nennt sie gewöhnlich die *arabischen* Ziffern, weil wir ihre Kenntniß den (in Spanien eingedrungenen) Arabern verdanken,*) obgleich sie unbezweifelt *indischen Ursprungs* sind.

2. Mit eben diesen Ziffern bezeichnet man auch die Mengen von Einheiten jeder beliebigen höheren Ordnung und deutet den entsprechenden Rang jeder Ziffer bloß durch die *Stelle* an,

*) Wahrscheinlich war der gelehrte Franzose *Gerbert*, welcher 999 unter dem Namen *Sylvester* II. Pabst wurde, der erste, welcher ihren Gebrauch von den Arabern entlehnte.

die man ihr giebt. Zu dem Ende setzt man in einer mehrtheiligen Zahl die Ziffer, welche ursprüngliche Einheiten bedeutet, oder die Einerziffer, stets zur äußersten Rechten an den niedrigsten Platz; unmittelbar daneben zur Linken die Ziffer, welche die Einheiten erster Ordnung, darauf diejenige, welche die Einheiten zweiter Ordnung, und so der Reihe nach zur Linken jeder vorigen Ziffer diejenige, welche die Menge von Einheiten der nächst höheren Ordnung bezeichnet.

In dekadisch gebildeten Zahlen folgt also von der Rechten zur Linken auf die Ziffer der Einer die der Zehner, der Hunderter, Tausender u. s. w., so daß man z. B. drei Hunderter, vier Zehner und sechs, oder dreihundert sechs und vierzig, 346 schreibt.

3. Diese Methode der Bezeichnung würde jedoch ohne weitere Bestimmungen nur für solche Zahlen zureichen, welche ohne Unterbrechung wenigstens eine Einheit von jeder Ordnung bis zur höchsten enthielten. Denn sobald eine oder mehre Einheiten niedriger Ordnung ausfielen, würden die Ziffern höheren Ranges nicht mehr an den ihnen gebührenden Platz kommen, folglich auch nicht ihre richtige Bedeutung erhalten. Um ihnen diese auch noch in solchen Fällen zu sichern, besetzt man die Stellen der fehlenden Einheiten mit dem Zeichen 0 (Null, zero), welches an sich Nichts oder die Abwesenheit jedes Zahlwerthes bedeutet, aus dem angeführten Grunde aber für das künstliche Zahlenschreiben unentbehrlich ist.

So schreibt man z. B. im dekadischen Zahlensysteme zwei Zehner oder zwanzig 20, weil die Einer fehlen, denen der niedrigste Platz zukäme; — drei tausend vier und siebenzig 3074, weil in ihr keine Hunderte vorkommen, welchen die zweite Stelle nach der Endziffer gebührt, und so in ähnlichen Fällen.

Andere Beispiele. Classenabtheilungen zur Erleichterung des Zahlen-Aussprechens und Schreibens.

Welcher Ziffern bedürfte man, um Zahlen zu schreiben, die nach der Grundzahl fünf, oder zwei, oder einer anderen außer zehn, gebildet sind?

Eine größere Menge von Strichen, Punkten oder anderen Zeichen ist zugleich nach der Grundzahl zehn und fünf (oder einer anderen) abzuzählen und in diesen verschiedenen Systemen zu schreiben.

Römische und griechische Zahlzeichen; Unvollkommenheit derselben.

Zweiter Abschnitt.

Die vier einfachen Rechnungsarten in ganzen Zahlen.

---

§. 6.

Rechnen. — Einfache Rechnungsarten.

1. Das Zählen ist die Grundlage der ganzen Arithmetik. Es fordert eine ursprüngliche Thätigkeit des Verstandes, welche nicht auf einfachere zurückgebracht werden kann.

Die Fertigkeit zu zählen wird daher von Jedem vorausgesetzt, ohne durch Regeln geleitet werden zu können (Postulat). Die Gesetze und Regeln der künstlichen Zahlenbildung haben nur den Zweck, das Geschäft des Zählens zu erleichtern.

Zahlen dienen aber nur als Mittel zur Größenbestimmung. Sie sind unentbehrlich, um Verhältnisse der Größen zu einander anzugeben. Sind diese Größen selbst schon durch Zahlen ausgedrückt, so dürfen diese statt ihrer gesetzt werden. Man kann verlangen, das Resultat der Vergleichung ebenfalls wieder durch eine Zahl auszudrücken. Durch Beziehungen und Verhältnisse unter gegebenen Größen werden andere abhängige bestimmt. Es muß möglich sein, aus den Zahlen, durch welche jene dargestellt werden, den bekannten Beziehungen gemäß, Zahlenwerthe der abhängigen Größen herzuleiten. Ueberhaupt also können Aufgaben, welche die Zusammensetzung und Vergleichung von Größen betreffen, auf Zahlen, als Stellvertreter derselben, übertragen und an diesen verwirklicht werden. Aus gegebenen Zahlen nach ihren Beziehungen zu einander neue herleiten, heißt r e c h n e n.

Alle Verrichtungen aber an und mit Zahlen, welche eine Rechnung erfordert, lassen sich auf das einfache Geschäft des Zählens zurückführen. Die Art dieser Zurückführung kann folglich durch Regeln bestimmt werden.

2. Nach der Eigenthümlichkeit derjenigen Verhältnisse, welche zwischen den zu verknüpfenden Zahlen stattfinden, unterscheidet man besondere Rechnungsarten (Operationen). Diese heißen einfach, ursprünglich oder arithmetische Grundoperationen, wenn sie, was ihren Begriff oder das Wesen der verlangten Zahlenverknüpfung angeht, sich nicht auf andere zurückführen lassen. Höhere Rechnungsarten erfordern nur eine wiederholte oder zusammengesetzte Anwendung der ursprünglichen.

3. Gleichzeitig können aber immer nur zwei Zahlen durch Rechnung verbunden werden. Es genügt also, die Begriffe und Regeln der Rechnungsarten ursprünglich nur für zwei Zahlen aufzustellen.

Alles Rechnen besteht nun entweder in der Zusammensetzung gegebener Zahlen (Synthesis), oder in der Wiederauflösung (Trennung, Zerlegung, Analysis) des Zusammengesetzten.

Eine Zusammensetzung zweier Zahlen zu einer dritten läßt sich aber nur auf zwei wesentlich verschiedene Arten denken. Beide Zahlen beziehen sich nämlich entweder auf dieselbe oder auf verschiedene Einheiten. Im ersten Falle bezeichnen beide Zahlen gleichartige Dinge und sind selbst gleichartig. Eine Zusammensetzung derselben gestattet keinen anderen Sinn, als daß sie zu einem Ganzen, d. h. zu einer neuen Zahl vereinigt werden sollen, welche sie als Theile neben einander gestellt (oder coordinirt) in sich begreift. In der Lösung dieser Aufgabe besteht die Addition. — Im zweiten Falle, wenn beide Zahlen verschiedene Einheiten haben, ist eine Vereinigung derselben nur in einer Voraussetzung möglich, wenn nämlich das, was die eine Zahl als Vielfaches einer gewissen Einheit oder aliquoter Theile derselben darstellt, in einen Inbegriff zusammengefasst, selbst wieder als Einheit einer neuen, der zweiten Zahl angenommen, mithin die Einheit des ersten Zahlwerthes dieser zweiten Einheit untergeordnet (oder subordinirt) ist. Die Vereinigung zweier Zahlen von dem angegebenen

Verhältnisse in der Weise, daß die erste wirklich für die Einheit der letzteren an die Stelle gesetzt wird, ist das Geschäft der Multiplication.

Beispiele zur Erläuterung dieses doppelten Verhältnisses zwischen zwei Zahlen — liefert jedes künstliche Zahlen-, Maß-, Gewichts-, Geld-System &c.

Jede Zusammensetzung macht aber auch die umgekehrte Aufgabe der Wiederauflösung des Zusammengesetzten möglich. So entspricht der Addition die Subtraction, der Multiplication die Division als entgegengesetzte Rechnungsart.

Es giebt also im Ganzen vier einfache Rechnungsarten oder Grundoperationen (Species) der Arithmetik. Am einfachsten werden sich dieselben mit ganzen Zahlen, als den Zahlen der einfachsten Form, verrichten lassen. Neben der Entwickelung ihres Begriffes (der natürlich gleich in völliger Allgemeinheit aufzustellen ist, weil er sich nicht ändert nach der besondern Beschaffenheit der Zahlen, auf welche er angewandt wird,) soll daher zunächst ihre Ausführung in ganzen Zahlen gezeigt werden.

§. 7.

Rechnungszeichen. — Arithmetischer Gebrauch der Buchstaben.

1. Wie jede Zahl, so hat auch jede besondere Rechnungsart ihr eigenthümliches Zeichen. Mit Hülfe derselben läßt sich jede mit Zahlen vorzunehmende Rechnung kurz und bestimmt ausdrücken.

2. Die Hauptaufgabe der Arithmetik ist aber, Gesetze und Regeln der Zahlenverknüpfung aufzustellen. Diese gelten für alle Zahlen einer bestimmten Form. Durch Ziffern werden aber stets nur einzelne, ganz bestimmte Zahlen bezeichnet. Sie können folglich nur zur Darstellung von Beispielen, nicht zum Ausdruck des Gesetzes oder der Regel selbst dienen. Um diese in völliger Allgemeinheit und dabei kurz und übersichtlich darzustellen, bedarf man noch eigener Zeichen, welche nicht einzelne, sondern überhaupt alle möglichen Zahlen, also das Wort oder den Begriff Zahl selbst vorstellen. Man bedient sich dazu der Buchstaben (meistens des kleinen lateinischen Alphabeths, a, b, c, x, y etc.). Schlechthin versteht man unter einem Buchstaben jede mögliche, sowohl ganze

als gebrochene Zahl. Soll derselbe aber nur Zahlen einer gewissen Form, z. B. nur ganze Zahlen bedeuten, wie dies häufig und namentlich in den nächsten Abschnitten der Fall ist, so muß diese Beschränkung ausdrücklich angezeigt werden, wenn sie sich nicht aus dem Zusammenhange von selbst ergiebt.

Bezeichnet man z. B. durch **a** und **b** zwei beliebige ganze Zahlen, so wird durch $\frac{a}{b}$ allgemein jeder denkbare Bruch vorgestellt.

Uebrigens braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß man während derselben Rechnung unter demselben Buchstaben auch stets den nämlichen Zahlwerth versteht.

§. 8.

Die Addition.

So wie zwei und mehre gleichartige Größen als Theile zu einem Ganzen vereinigt werden können, so darf man auch fordern, die Zahlen, durch welche solche Größen bestimmt werden, in eine einzige zusammenzuziehen, welche das Ganze darstellt. Die Rechnungsart, welche diese Aufgabe löst, heißt Addition.

1. Zwei (oder mehre) Zahlen zu einander addiren, heißt demnach, dieselben als Theile zu einer neuen Zahl vereinigen, welche als Ganzes zusammenfasst, was jene getrennt bezeichneten. Die zu vereinigenden Zahlen werden auch wohl Posten oder Summanden, die aus ihrer Vereinigung entspringende Zahl aber wird Summe (**summa**) oder Aggregat (aggrego) genannt.

Das Zeichen der Addition ist $+$ („plus" »und«), zwischen die zu addirenden Zahlen gesetzt, z B. $3 + 4 = 7$, wo das Zeichen $=$ (»gleich«), wie überhaupt, die Gleichheit der beiden Ausdrücke, zwischen welchen es steht, und 7 die Summe bedeutet.

2. In ganzen Zahlen kommt die Rechnung darauf zurück, daß man von der einen Zahl weiter zählt, bis man sämmtliche Einheiten der zweiten Zahl zu ihr hinzugenommen hat, was durch ein gleichzeitiges Zählen bis zu dieser zweiten Zahl neben jenem ersten bemerkt werden muß. Die zuletzt erhaltene Zahl ist die gesuchte

Summe. Das Addiren zweier ganzer Zahlen besteht also in einem bloßen Zusammenzählen derselben.

Bildliche Darstellung des beschriebenen Verfahrens.

Um mehr als zwei Zahlen zu addiren, vereinigt man doch immer zuerst nur zwei derselben, nimmt zu der Summe, als einer einzigen neuen Zahl, die dritte und so fort zu jeder vorigen Summe wieder eine neue Zahl bis zur letzten.

B.

3. Die Ordnung, welche man bei dem Zusammenzählen dieser Zahlen befolgt, ist ohne Einfluß auf die Größe der Summe, weil überhaupt die Ordnung, in welcher Theile zu einem Ganzen vereinigt werden, auf die Größe derselben keinen Einfluß hat.

So ist $3 + 4 = 4 + 3 = 7$;
allgemein: $a + b = b + a$.

Erweiterung dieser Formel auf mehr als zwei Theile.

4. Es liegt schon in dem Begriffe der Addition, daß die zu addirenden Zahlen gleichartig sein müssen. Denn nur gleichartige Dinge lassen sich als Theile zu einem Ganzen verbinden. Zahlen sind aber nur dann gleichartig, wenn ihnen dieselbe Einheit zum Grunde liegt. **Die Summe ist natürlich wieder von** derselben **Art, wie ihre Theile.**

Es ist an einem Beispiele zu zeigen, daß bloße Gleichartigkeit (nicht Gleichheit) der Einheiten, aus welchen Zahlen gebildet sind, nicht hinreicht, um diese selbst gleichartig zu nennen, daß aber solche Zahlen gleichartig und in diesem Sinne zur Addition fähig werden, wenn man ihre Einheiten unter einen gemeinschaftlichen höheren Begriff stellt.

5. In Buchstaben läßt sich bei der völligen Unbestimmtheit ihrer Bedeutung das Resultat der Addition im Allgemeinen nicht einfacher als durch bloße Andeutung der Operation darstellen ($a + b$). Nur in dem Falle, wenn derselbe Buchstabe zu wiederholten Malen in der Summe vorkommt, fasst man das Resultat dadurch kürzer zusammen, daß man die gleichen Buchstaben wirklich zusammenzählt und ihre Gesammtmenge durch eine vorgesetzte Zahl ausdrückt. Hiernach ist

$a + a = 2a$;

$a + b + b + a + b = 2a + 3b$;

$$a + 2b + 2c + 3b + a + 4a = 6a + 5b + 2c.$$

Andere Beispiele.

§. 9.

Die Subtraction.

1. Der Vereinigung von zwei Theilen zu einem Ganzen ist die Zerlegung eines Ganzen in zwei Theile entgegengesetzt. Diese Aufgabe bleibt aber unbestimmt, so lange nicht der eine dieser Theile gegeben, und verlangt wird, den zweiten zu finden, welcher mit jenem zusammen das Ganze ausmacht. Die Lösung dieser Aufgabe in Zahlen ist das Geschäft der Subtraction.

Sie nimmt von zwei gegebenen Zahlen die eine als Summe zweier Theile an, den Minuend (minuendus sc. numerus), die andere als den einen dieser Theile, den Subtrahend (subtrahendus sc. numerus). Die zweite Zahl von der ersten subtrahiren, heißt, eine neue finden, welche zu der zweiten (dem Subtrahend) addirt, die erste (den Minuend) als Summe hervorbringt. Diese neue Zahl, der gesuchte zweite Theil, wird Rest, Differenz (numerus, qui restat, differentia) oder Unterschied genannt.

Das Zeichen der Subtraction ist — („minus" »weniger«), so zwischen Minuend und Subtrahend gesetzt, daß jener vorangeht, z. B. $7 - 4 = 3$.

Welche Probe für die Richtigkeit des Restes gründet sich auf diese Erklärung?

2. Aus dem Verhältniß der Subtraction zur Addition geht hervor, daß eine Zahl unverändert bleibt, wenn zu ihr eine andere erst addirt, und dieselbe nachher wieder subtrahirt wird, oder umgekehrt.

$$4 + 3 - 3 = 4 - 3 + 3 = 4;$$

allgemein $a + b - b = a - b + b = a$.

3. In ganzen Zahlen lässt sich die Subtraction auf doppelte Art ausführen. Entweder man zählt die Einheiten des Subtrahends vom Minuend ab, um zu erfahren, welche Zahl übrig bleibt, oder man zählt vom Subtrahend an aufwärts, bis man den Mi-

nuend erreicht, um durch eine neue Zahl auszudrücken, wie viele Einheiten dazu erforderlich sind.

Beide Arten des Subtrahirens sind an einem Beispiele bildlich darzustellen. Es ist anzugeben, in welchen Fällen das eine oder andere Verfahren den Vorzug verdient, und auf welchem Grunde die Möglichkeit dieser zweifachen Ausführung beruht.

4. Daß Minuend und Subtrahend gleichartige Zahlen sein müssen, und daß sich auch der Rest wieder auf dieselbe Einheit bezieht, folgt aus dem schon früher erwähnten Satze, daß ein Ganzes mit seinen Theilen gleichartig ist.

5. Werden Minuend und Subtrahend durch Buchstaben ausgedrückt, so kann die Rechnung, wodurch der Rest zu finden ist, bloß angedeutet werden, wenn für beide verschiedene Buchstaben gewählt sind, $a - b$; wird dagegen in beiden derselbe Buchstabe gezählt, so lässt sich durch wirkliches Abzählen der einen Menge von der anderen der Rest auf entsprechende Art, wie in gleichem Falle die Summe bei der Addition, in zusammengezogener Form darstellen; z. B. $7a - a = 6a$; $7a - 3a = 4a$; $a - a = 0$.

Für besondere Voraussetzungen, welche man in Absicht auf die Form des Minuends oder Subtrahends macht, lassen sich aus dem Begriffe der Subtraction leicht folgende Regeln ableiten.

6. Wenn der Minuend aus Theilen besteht, so darf man von einem, oder wenn dieser allein nicht ausreicht, von mehren derselben zusammengenommen den Subtrahend abziehen, und das Uebrigbleibende ist der Rest;

z. B. $(7 + 5) - 4 = 7 + (5 - 4) = (7 - 4) + 5$
$[= 7 + 1 = 3 + 5 = 8.]$
$(7 + 5) - 8 = ?$

Allgemein: $(a + b) - c = a + (b - c) = (a - c) + b.$

Beispiele in benannten Zahlen.

In der Formel $a + b - c = a - c + b$ ist auch der Satz enthalten, daß die Ordnung, in welcher Addition und Subtraction auf einander folgen, für das Resultat gleichgültig ist.

7. Besteht der Subtrahend aus Theilen, so darf man, statt des Ganzen, auch einen Theil nach dem anderen, gleichviel in welcher Ordnung, vom Minuend wegnehmen; z. B.

$$9 - (2 + 4) = (9 - 2) - 4 = (9 - 4) - 2$$
$$[= \quad 7 \quad - 4 = \quad 5 \quad - 2 = 3]$$

Allgemein: $a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$

Umgekehrt darf man also auch mehre Zahlen, welche nach und nach von einer anderen subtrahirt werden sollen, erst für sich in eine Summe vereinigen, um alsdann diese auf einmal abzuziehen; z. B.

$$a - b - c = a - (b + c);$$
$$a - b - 2b = a - \quad 3b$$

B. in Zahlen und Buchstaben.

8. Wenn sich die beiden vorigen Fälle in der Voraussetzung vereinigen, daß Minuend und Subtrahend zugleich in Theilen gegeben sind, so ist auch ohne Erläuterung klar, wie die beiden dafür aufgestellten Regeln in mannigfaltiger Anordnung der Operationen angewandt werden können; z. B.

$$\begin{aligned}(a + b) - (c + d) &= a + b - c - d \\ &= a - c + b - d \\ &= a - c - d + b \text{ etc.}\end{aligned}$$

Alle denkbaren Umstellungen dieser oder einer noch zusammengesetzteren Formel sind wirklich auszuführen.

B. in Zahlen, zumal benannten.

9. Ein abgekürztes Resultat lässt sich bei der Subtraction zusammengesetzter Buchstabenausdrücke wiederum nur dann erhalten, wenn gleiche Buchstaben im Minuend und Subtrahend gezählt werden. In diesem Falle zieht man die Theile des letzteren, da die Wahl frei steht, von den gleichnamigen Theilen des ersteren ab; z. B.

$$5a + 3b - 2b = 5a + b;$$
$$\begin{aligned}&3a + 4b + c \quad - (2b + c) \\ =\ &3a + 4b + c \\ &\quad\ - 2b - c \\ \hline =\ &3a + 2b.\end{aligned}$$

Ereignet sich dabei der Fall, daß der Subtrahend oder ein Theil desselben größer ist, als derjenige Theil des Minuends, von welchem er subtrahirt werden müsste, so nimmt man ein so großes Stück desselben, als im Minuend vorhanden ist, wirklich weg und setzt das Uebrigbleibende mit dem Zeichen — in den Rest, um anzudeuten, daß dieses gleichfalls noch subtrahirt werden müßte; z. B.

$$a + 3b - 5b = a + 3b - (3b + 2b)$$
$$= a + 3b - 3b - 2b = a - 2b;$$

$$\begin{array}{l} 5a + b + 2c + d \\ -(a + 4b + 7c) \\ \hline = 4a - 3b - 5c + d. \end{array}$$

Zusammengesetzteres B.

10. Ist der Subtrahend selbst schon als Differenz oder Unterschied zweier Zahlen ausgedrückt, so kann man, anstatt diesen zu berechnen und abzuziehen, zuvörderst auch die Zahl, von welcher eine andere selbst erst weggenommen werden sollte, unverändert vom Minuend subtrahiren und nachher die zweite hinzuaddiren — oder (nach 6.) erst diese zum Minuend addiren und darauf jene subtrahiren; z. B.

$$9 - (7 - 3) = (9 - 7) + 3 = (9 + 3) - 7$$
$$[= 9 - 4 = 2 + 3 = 12 - 7 = 5]$$

Allgemein:

$$a - (b - c) = a - b + c = a + c - b.$$

Der Grund dieses Verfahrens ist an dem Zahlen- und Buchstabenbeispiel zu erläutern.

Ein Beispiel in Zahlen, auch benannten, welches nach der zweiten Vorschrift bequemer zu berechnen ist, als nach der ersten, etwa nach folgender Andeutung: 9 Pfd. — (7 Pfd. — 5 Loth) = 9 Pfd. — (6 Pfd. + 27 Loth) = 9 Pfd. — 7 Pfd. + 5 Loth = 2 Pfd. + 5 Loth.

Umgekehrt läßt sich der vorige Satz auch so aussprechen: Soll von einer Zahl eine andere subtrahirt, und darauf eine dritte wieder hinzuaddirt werden, so kann man diese auch erst von der zu subtrahirenden wegnehmen und nachher den Rest von der ersten abziehn.

$$a - b + c = a - (b - c).$$

B.

Zur Uebung der bisher gegebenen Regeln einige Buchstaben-Beispiele, in welchen abwechselnd Additionen und Subtractionen vorgeschrieben sind. Als ein solches, in welchem alle möglichen Verhältnisse zwischen je zwei zu vereinigenden Theilen vorkommen, ist das nachstehende oder ein ähnliches von eigener Erfindung, mit steter Beziehung auf die angewandten Regeln, zu berechnen:

$$8a + 2b + 3c - 5d - e - f - 5g + 7k + 3l - m$$
$$-(3a + 2b + 7c + d - 4e - f - 2g - k + 9n - b).$$

Anmerk. 1. In dem vorstehenden §. sind zum ersten Male die sogenannten Einschließungszeichen oder Klammern () gebraucht worden. Ihre Bedeutung und Unentbehrlichkeit in arithmetischen Ausdrücken wird schon aus dieser Anwendung deutlich hervorgehn. Man bedient sich derselben im Allgemeinen, um die zwischen ihnen eingeschlossenen Zahlen oder Buchstaben als zu einem Ganzen gehörig darzustellen, so daß sich das daneben stehende Rechnungszeichen auf dieses Ganze erstreckt, während dasselbe sonst nur auf die zunächst stehenden Zahlen oder Buchstaben zu beziehen ist.

Welchen Sinn haben z. B. die Formeln $a - b + c$ und $a - (b + c)$, oder $a - (b - c)$ und $a - b - c$, welche sich nur durch das Vorkommen oder Wegfallen der Klammern von einander unterscheiden?

Welche mechanische Regel lässt sich aus den beiden unter Nro. 7 und 10 gegebenen Vorschriften für die Umänderung der Zeichen herleiten, durch welche die Theile eines Subtrahends verbunden sind, wenn man die Einschließungszeichen aufhebt, oder, wie man zu sagen pflegt, die Klammern auflöst.

$$a - (b + c - d) = ?$$

Anmk. 2. In der Folge sollen Zahlen oder Buchstaben (als Stellvertreter derselben), welche durch Addition oder Subtraction ($+$ oder $-$) verbunden sind, Theile, die letzteren aber zum Unterschiede von den anderen subtractive heißen. Der Name Theil in diesem Sinne bezieht sich also nur auf die äußere Form eines Ausdrucks und bezeichnet überhaupt, was als getrennt oder abgesondert dargestellt wird.

§. 10.

Die Multiplication.

1. Die zweite verknüpfende Grundoperation setzt, wie schon oben (§. 6. 3.) bemerkt wurde, zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit voraus, daß das, was die eine als Einheit zählt, durch die andere Zahl in Beziehung auf eine neue Einheit dargestellt wird. Die Angabe, welche die erste Zahl enthält, auf eine solche zurückzuführen, welcher die Einheit der zweiten Zahl zum Grunde liegt, ist die Aufgabe der Multiplication.

Die Lösung dieser Aufgabe erfordert, daß man die eine Zahl wirklich an die Stelle jener Einheit setzt, deren Werth sie im Verhältniß zu der neuen Einheit ausdrückt, mit ihr alle die Verrichtungen (Wiederholung oder Eintheilung oder Beides zugleich) vornimmt, welche die andere Zahl für die Einheit vorschreibt, und das Resultat selbst wieder in einer Zahl zusammenfasst. Die zuerst genannte Zahl, welche für die Einheit der anderen an die Stelle gesetzt wird, heißt der Multiplicand (multiplicandus sc. numerus), diese zweite der Multiplicator, und die dritte gefundene Zahl das Product (numerus productus) oder Factum.

Eine Zahl mit einer anderen multipliciren, heißt demnach, die eine (den Multiplicand) für die Einheit der zweiten (des Multiplicators) an die Stelle setzen, um an ihr Alles das zu vollziehen, was die zweite Zahl vorschreibt, und das Resultat durch eine neue Zahl (das Product) auszudrücken.

Das Zeichen der Multiplication ist . (»mal«, »multiplicirt mit«), seltner $\times$, zwischen Multiplicand und Multiplicator gestellt; z. B.

$$3 \cdot 2 = 3 \times 2 = 6.$$

Buchstaben werden bloß an einander gerückt, um ihre Multiplication anzudeuten; z. B.

$$a \cdot b = a \times b = ab.$$

An der Entstehung einer Multiplicationsaufgabe aus wirklichen Größenbeziehungen ist die Definition dieser Rechnungsart zu erläutern.*)

2. Der Multiplicator giebt der vorigen Erklärung zufolge nur die Regel an, nach welcher sich das Product bildet, indem er anzeigt, wie ein unbestimmtes Etwas, die Einheit, zu nehmen sei. Er ist folglich stets als unbenannte Zahl zu denken. Dieser Regel wird der Multiplicand als Werth jener unbestimmt gelassenen Einheit untergeordnet, gleichsam als der Stoff, aus

*) Bei Schülern, welche (wie hier vorausgesetzt wird) durch den gewöhnlichen Rechenunterricht schon vorgeübt sind, wird es nicht bloß erlaubt, sondern sogar rathsam sein, zur Erläuterung des Multiplicationsbegriffs schon hier auch solche Beispiele zu gebrauchen, wo eine ganze Zahl mit einer gebrochenen zu multipliciren ist, um nämlich auf die Nothwendigkeit aufmerksam zu machen, diesen Begriff so allgemein, wie hier geschehen, aufzufassen, und sich nicht mit den zu engen Erklärungen »Vervielfältigen, Sovielmalnehmen« u. dergl. zu begnügen.

welchem sich das Product bildet. Das Product ist daher stets mit dem Multiplicand gleichartig, oder beide beziehen sich auf dieselbe Einheit. Es erzeugt sich aus diesem auf dieselbe Weise, wie der Multiplicator aus dem Eins. Das Product hat also dasselbe Verhältniß zum Multiplicand, wie der Multiplicator zu seiner Einheit; dieser ist der Ausdruck jenes Verhältnisses. (Vergl. §. 1. 4.)

Es ist zu zeigen, daß bei den sogenannten Resolutionen (z. B. wie viel Loth sind 3 Pfd.?) und anderen Aufgaben (z. B. ein Arbeiter webt täglich 4 Ellen, wie viel ihrer drei?) der Multiplicator nur scheinbar benannt sei.

3. Bei der wirklichen Ausführung einer Multiplicationsaufgabe werden die Verrichtungen, welche der Multiplicator, wie jede Zahl, mit der Einheit vorzunehmen fordert, da sie nun selbst schon an einer Zahl vollzogen werden sollen, zu eigenthümlichen, stets aber einfacheren Rechnungen oder Operationen.

Am leichtesten fällt die Multiplication zweier ganzer Zahlen aus. Der Multiplicator verlangt alsdann nur Wiederholung der Einheit und Zusammenfassen der bestimmten Menge. Löst man ihn also in seine Einheiten auf, um für jede den Multiplicand zu setzen, so hat man nur noch eine Menge gleicher ganzer Zahlen zu addiren. Ihre Summe ist das gesuchte Product, mithin selbst wieder eine ganze Zahl. Die Multiplication in ganzen Zahlen setzt also schon die einfachere Addition voraus und kommt dadurch auf das Zählen selbst zurück.

Bildliche Darstellung des Verfahrens an einem Beispiele. — Wie kann umgekehrt eine Addition lauter gleicher Zahlen in eine Multiplicationsaufgabe verwandelt werden?

4. Es verdient als Thatsache bemerkt zu werden und läßt sich leicht allgemein beweisen, daß Multiplicand und Multiplicator, wenn beide unbenannte ganze Zahlen sind, ihre Namen und Geschäfte mit einander verwechseln dürfen, ohne daß die Größe des Productes geändert wird.

$$4 \, . \, 3 = 3 \, . \, 4 = 12; \quad a \, . \, b = b \, . \, a.$$

Denn indem man den Multiplicand (a) so oft setzt, als der Multiplicator (b) vorschreibt, setzt man jede seiner (a) Einheiten eben so oft. Eine Einheit aber so viel mal nehmen, als der Multiplicator verlangt (b mal), heißt, diesen selbst (b) einmal nehmen. Man erhält folglich im Producte den Multiplicator (b) eben so oft, als der Multiplicand Einheiten zählt (a mal), während man diesen (a) so viel mal setzte, als jener verlangt, (b mal) — mit anderen Worten: im Producte erscheint zugleich der Multiplicator mit dem Multiplicand multiplicirt, während im ersten Sinne dieser mit jenem multiplicirt wurde.

Dieser Austausch in den Verrichtungen beider Zahlen bei der Multiplication ist durch ein Beispiel anschaulich zu machen, wo das Product in Einheiten aufgelöst so geschrieben wird, daß diese im horizontalen oder verticalen Sinne zusammengezählt den einen oder anderen Sinn geben.

Aus diesem Grunde sagt man, zwei Zahlen werden mit einander multiplicirt, sobald es frei steht, welche von beiden als Multiplicand oder als Multiplicator angesehen werden soll, und nennt beide mit einem gemeinschaftlichen Namen Factoren des Products.

Für die Fälle, in welchen der Multiplicand oder der Multiplicator oder beide zugleich eine zusammengesetzte Form haben, ergeben sich aus dem allgemeinen Begriffe der Multiplication leicht die nachstehenden Regeln.

5. Besteht der Multiplicand aus Theilen, so darf man statt der Summe auch jeden einzelnen Theil mit dem Multiplicator multipliciren; die entstandenen Producte, Partialproducte, müssen nachher zusammenaddirt werden. — Befinden sich unter jenen Theilen des Multiplicands auch subtractive, so kann man gleichfalls jeden Theil für sich multipliciren, nur müssen die aus den letzteren hervorgegangenen Partialproducte selbst wieder subtrahirt werden.

$$(a + b - c) . d = ad + bd - cd.$$

Ableitung der Regel an einem Zahlenbeispiele. — Andere Beispiele in Zahlen, zumal benannten, wo die Multiplication der einzelnen Theile bequemer zum Resultat führt, als die vorläufige Zusammenziehung des Multiplicands. Dieser ist mit Beibehaltung desselben Werthes einmal als Summe, ein anderes Mal als Differenz darzustellen.

6. Besteht der Multiplicator aus Theilen, auch subtractive mit eingeschlossen, so kann man, anstatt diese erst zu vereinigen,

den Multiplicand auch mit jedem einzelnen multipliciren und nachher die entstandenen Partialproducte auf dieselbe Weise zusammenziehn, wie die Theile, aus denen sie entsprangen, verbunden werden sollten.

$$a \,.\, (b + c - d) = ab + ac - ad.$$

Ableitung und Beispiele, wie bei der vorigen Regel.

7. Bestehen Multiplicand und Multiplicator zugleich aus Theilen, so braucht man die beiden vorigen Regeln nur nach einander anzuwenden. Man multiplicirt jeden Theil des Multiplicands nach und nach mit jedem Theile des Multiplicators und addirt sämmtliche Partialproducte, wenn unter den Theilen selbst keine andere als durch Addition verknüpfte vorkommen. Sind unter ihnen subtractive vorhanden, so werden diejenigen Producte, in welche nur ein subtractiver Theil eingegangen ist, selbst wieder subtrahirt, solche dagegen, in welchen sich zwei subtractive Theile vereinigt haben, zu den übrigen wieder addirt.

Der leichteren Uebersicht wegen mag jeder Theil der Regel nach seiner besonderen Voraussetzung durch eine eigene Formel ausgedrückt werden:

$$(a + b) \,.\, (c + d) = ac + bc + ad + bd$$
$$(a - b) \,.\, (c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

Zur Ableitung beider Regeln genügen folgende Andeutungen.

Wird zuerst der Multiplicand als einfach behandelt, so erhält man durch Anwendung der unter Nro. 6 aufgestellten Regel aus der ersten Aufgabe

$$(a + b) \,.\, (c + d) = (a + b) \,.\, c + (a + b) \,.\, d$$

und daraus durch zweimalige Anwendung der unter Nro. 5 gegebenen Vorschrift $= ac + bc + ad + bd$, wie oben.

Durch ähnliches Verfahren entwickelt sich aus der zweiten Aufgabe

$$(a - b) \,.\, (c - d)$$

zuerst nach 6) $= (a - b) \,.\, c - (a - b) \,.\, d$

dann nach 5) $= (ac - bc) - (ad - bd)$

und hieraus nach §. 9. 10) $= ac - bc - ad + bd$

das oben angegebene Resultat.

Dieselben Resultate erhält man, wenn zuerst die unter 5) und dann die unter 6) aufgestellte Regel angewandt wird.

Auch diese zweite Anordnung der Rechnung ist auszuführen. — Zahlenbeispiele, an welchen besonders die Richtigkeit des zweiten Theils der Regel unter zweckmäßigen Voraussetzungen nachzuweisen ist*) — Das Product $(a + b - c) \cdot (d + e - f)$ schrittweise, nach Art der vorstehenden, zu entwickeln; ferner die Producte
$(a + b) \cdot (a + b)$, $(a + b) \cdot (a - b)$, $(m + r - x) \cdot (m + r + x)$ oder ähnliche zu berechnen und die Resultate so viel als möglich zusammenzuziehen.

Die vorhergehenden drei Regeln bestätigen auf den ersten Blick die Richtigkeit des früheren Satzes, daß Multiplicand und Multiplicator, beide als unbenannte Zahlen gedacht, ohne Aenderung des Products mit einander verwechselt werden dürfen, auch für die Voraussetzung, daß der eine oder andere von ihnen oder beide zugleich aus Theilen bestehen.

Ein Product, dessen bloß angedeutete Factoren aus Theilen zusammengesetzt sind, soll in der Folge unentwickelt, dagegen

*) Solche Beispiele sind etwa nach Art des folgenden auszuführen.

Ein Arbeiter erhält wöchentlich 1 Rthl. 68 Grote, wofür bequemer zu setzen ist 2 Rthl. — 4 Gr. (da 1 Rthl. = 72 Gr.), also für ein Vierteljahr oder 13 Wochen 13 mal (2 Rthl. — 4 Gr.) = 2 Rthl. . 13 — 4 Gr. . 13 = 26 Rthl. — 52 Gr. Nun ist er aber während dieser Zeit 3 Wochen aus dem Dienste geblieben; man zieht ihm also dafür 3 mal (2 Rthl. — 4 Gr.) = 2 Rthl. . 3 — 4 Gr. . 3 = 6 Rthl. — 12 Gr. wieder ab. Wollte man ihm also zuerst die 6 Rthl. abziehen, so müßte man ihm die zu viel genommenen 12 Gr. wieder zulegen. Er erhielte daher für seine Dienstzeit

Dienstzeit	26 Rthl.	— 52 Gr.
	— 6 „	+ 12 „
	= 20 Rthl.	— 40 Gr.

Man hat aber dieselbe Rechnung geführt, als wenn man ihm seinen wöchentlichen Lohn für (13 — 3) Wochen ausbezahlen wollte, d. i. (2 Rthl. 4 Gr.) . (13 — 3) = (2 Rthl. — 4 Gr.) . 13 — (2 Rthl. — 4 Gr.) . 3 = 26 Rthl. — 52 Gr. — 6 Rthl. + 12 Gr. — Diese Rechnung bewährt aber die obige Regel. Den Gesammtbetrag für die ganze Dienstzeit, nämlich 20 Rthl. — 40 Gr. hätte man einfacher auch dadurch gefunden, wenn man den Lohn gleich nur für 10 (= 13 — 3) Wochen berechnet hätte, also (2 Rthl. — 4 Gr.) . 10 = 20 Rthl. — 40 Gr.

in Theile aufgelöst, welche nur noch einfache Factoren enthalten, entwickelt heißen.

8. Um ein Product aus zwei Factoren mit einer dritten Zahl zu multipliciren, kann man mit ihr erst den einen Factor und hernach das, was herausgekommen ist, mit dem andern Factor multipliciren; z. B.

$$(5 \cdot 2) \cdot 3 = (5 \cdot 3) \cdot 2 = (2 \cdot 3) \cdot 5;$$
$$[= 10 \cdot 3 = 15 \cdot 2 = 6 \cdot 5 = 30.]$$

allgemein, $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = (b \cdot c) \cdot a$.

Denn das Product aus zwei ganzen Zahlen, welches hier als Multiplicand angenommen ist, läſſt sich in eine Summe auflösen, welche den einen Factor so viel mal enthält, als der andere Factor anzeigt. Nimmt man nun jeden Theil dieser Summe so oft, als die dritte Zahl verlangt, so hat man die ganze Summe mit ihr multiplicirt. Man erhält aber dadurch das Product aus dem einen Factor und der dritten Zahl selbst wieder eben so oft, als vorhin diesen Factor allein, d. h. man hat das Product aus dem einen Factor und der dritten Zahl selbst wieder mit dem anderen Factor multiplicirt.

In Zeichen läſſt sich diese Rechnung folgendermaßen versinnlichen:

Es ist $(a \cdot b) = (b \cdot a) = (\overbrace{a + a \ldots + a}^{b \text{ mal}}) = (\overbrace{b + b \ldots + b}^{a \text{ mal}})$;

also $(a \cdot b) \cdot c = (b \cdot a) \cdot c = (\overbrace{a + a \ldots + a}^{b \text{ mal}}) \cdot c = (\overbrace{b + b \ldots + b}^{a \text{ mal}}) \cdot c$

$$= (\overbrace{ac + ac \ldots + ac}^{b \text{ mal}}) = (\overbrace{bc + bc \ldots + bc}^{a \text{ mal}})$$
$$= (ac) \cdot b \qquad = (bc) \cdot a, \text{ wie oben.}$$

Entsprechende Ableitung des Zahlenbeispiels.

Versetzt man in diesen Ausdrücken auch die beiden ersten Factoren (nach 4.),

also $(a \cdot b) \cdot c = (ac) \cdot b = (bc) \cdot a$
$= (ba) \cdot c = (ca) \cdot b = (cb) \cdot a$;

so erhält man alle möglichen Anordnungen dieser drei Factoren, folglich den Satz, daß diese in jeder beliebigen Folge ohne Aenderung des Products mit einander multiplicirt werden dürfen.

Man schreibt daher ein solches Product ohne Andeutung der Folge, in welcher die Factoren zur Multiplication gezogen werden sollen, abc.

Zu derselben Regel führt die Aufgabe, eine Zahl a mit einem Producte aus zwei Factoren (b . c) zu multipliciren. Man kann jene Zahl erst mit dem einen Factor, b oder c, und was herauskommt, mit dem andern, c oder b multipliciren. In Zeichen

$$a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c = (a \,.\, c) \,.\, b$$

Denn ein Product aus zwei ganzen Zahlen (b . c) enthält die Menge von Einheiten, welche die eine Zahl bezeichnet, so viel mal, als die andere Zahl angiebt, b Einheiten c mal. Wird daher statt jeder dieser Einheiten der Multiplicand a gesetzt, so erhält man ein so großes Vielfaches desselben, als der eine Factor bezeichnet, selbst wieder so oft wiederholt, als der andere vorschreibt, d. i. das b fache von a, (a . b), c mal, oder das c fache von a, (a . c), b mal.

Also: $a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c = (a \,.\, c) \,.\, b$, wie oben.

Entsprechende Ausführung eines Zahlenbeispiels.

Ein Blick auf diese Formel lehrt aber schon, daß die Rechnung wieder ganz dieselbe ist, wie bei der vorigen Voraussetzung, wo der Multiplicand als ein Product von Factoren angenommen wurde:

$$a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c.$$

Es ist also gleichgültig, ob man in einem Producte aus drei Factoren dem Multiplicand oder dem Multiplicator zwei derselben zutheilt. Die Regeln für beide Fälle sind nur im Ausdruck verschieden.

10. Indem man nun jeden Factor des Multiplicands oder Multiplicators selbst wieder als ein Product von Factoren annehmen kann und auf diese Voraussetzung die vorigen Regeln nur nach und nach anwendet, ergiebt sich leicht der allgemeinere Satz, daß beliebig viele Factoren, gleichviel, welche dem Multiplicand oder dem Multiplicator angehören, in jeder möglichen Ordnung zu einem Producte vereinigt werden können, indem man mit einem nach dem andern multiplicirt. Man deutet daher überhaupt die Aufeinanderfolge einzelner Multiplicationen durch Einschließungszeichen nicht weiter an und schreibt z. B. anstatt $(a \,.\, b) \,.\, (c \,.\, d) = ((a \,.\, b) \,.\, c) \,.\, d = d \,.\, (a \,.\, (b \,.\, c))$ etc. kurzweg abcd.

Die Multiplication eines Products aus mehren Factoren mit einer neuen Zahl kann also an jedem beliebigen Factor, aber stets nur an einem, vollzogen werden; — kürzer: Multiplication eines Factors in einem Producte ist Multiplication des ganzen Products.

Einige oder alle Anordnungen von vier Factoren eines Productes sind aus den vorhergehenden Regeln herzuleiten.*)

Zum Schluß dieses §. sind einige Beispiele zu berechnen, in welchen mehre von den unter Nro. 4 bis 10 aufgestellten Regeln zugleich zur Anwendung kommen, z. B.

$$(aab + 3abb - bb) \cdot (3a - 5b + 4) = ?$$

Dabei ist zugleich die Frage zu beantworten, wann Producte, welche Buchstaben als Factoren enthalten, eine Zusammenziehung gestatten.

§. 11.

Die Division.

1. Die Bildung eines Products macht die umgekehrte Aufgabe der Auflösung eines Products in seine Factoren möglich. Damit aber diese Aufgabe bestimmt werde, muß außer dem Producte auch sein einer Factor gegeben werden. Die Rechnungsart, welche vermittelst dieser beiden Zahlen den zweiten Factor findet, heißt Division.

Die Division nimmt also eine Zahl als vollendetes Product aus zwei Factoren an, den Dividend (dividendus sc. numerus), und eine zweite Zahl als den einen dieser Factoren, den Divisor. Die erste Zahl durch die zweite dividiren, heißt, eine neue finden, welche mit dieser (dem Divisor) multiplicirt, jene (den Dividend) als Product hervorbringt. Die gesuchte Zahl, der zweite Factor, wird Quotient (quotus, quoties) genannt.

Das Zeichen dieser Rechnungsart ist anfänglich : (»dividirt durch«), so zwischen Dividend und Divisor gesetzt, daß jener vorangeht, z. B. $6 : 3 = 2$.

Welche Probe für die Richtigkeit des Quotienten gründet sich auf diese Erklärung?

---

*) Hier, oder schon früher §. 8. 3, kann gelegentlich auf die Menge verschiedener Ordnungen aufmerksam gemacht werden, in welchen mehre verschiedene, oder auch nur verschieden bezeichnete Dinge zusammentreten können.

2. Aus dem Verhältnisse von Division und Multiplication zu einander folgt, daß eine Zahl unverändert bleibt, wenn man sie mit einer anderen erst multiplicirt und darauf wieder dividirt, oder umgekehrt, z. B.

$$(6 \,.\, 3) : 3 = (6 : 3) \,.\, 3 = 6;$$

allgemein $$(a \,.\, b) : b = (a : b) \,.\, b = a.$$

3. Wenn Dividend und Divisor unbenannte Zahlen sind, so lässt sich die Division in verschiedenem Sinne ausführen. Ihre Aufgabe lässt es nämlich in diesem Falle unentschieden, ob der gegebene Factor (Divisor) bei der Bildung des Products (Dividends) als Multiplicand oder als Multiplicator mitgewirkt habe. Jenachdem man aber von der einen oder anderen Voraussetzung ausgeht, muß auch die Vorstellung von den Verrichtungen, welche sowohl der gegebene als auch der gesuchte Factor bei der Erzeugung des Products gehabt hat, und demgemäß auch die Rechnung verschieden ausfallen.

a. Soll der Divisor als Multiplicand im Producte enthalten sein, so hat der gesuchte Factor, als Multiplicator, die Art und Weise anzugeben, wie aus jenem der Dividend entstanden ist. Dividend und Divisor werden als gleichartig gedacht, und die Division erscheint als eine **Vergleichung** zwischen beiden, wobei der Divisor als Maßgröße betrachtet wird, um durch eine dritte Zahl, welche ihn als etwas Einfaches zählt, die Art und Weise anzugeben, wie sich aus ihm der Dividend zusammengesetzt hat. Der Quotient drückt alsdann das **Verhältniß** des Dividends zum Divisor aus.

In welcher Ordnung müssen unter dieser Annahme die vier Größen: Dividend, Divisor, Quotient und Einheit paarweise mit einander verglichen werden, um dasselbe Verhältniß zu geben? (S. §. 11. 2.)

b. Wird dagegen angenommen, der Divisor sei bei der Bildung des Products der Multiplicator gewesen, so wird eine Zahl gesucht, welche nach der Vorschrift, die er angiebt, oder an die Stelle seiner Einheit gesetzt, den gegebenen Dividend hervorbringt. In diesem Falle ist also der Quotient mit dem Dividend gleichartig.

Wie sind unter dieser Voraussetzung die vier vorhin genannten Größen zur Vergleichung anzuordnen, um gleiche Verhältnisse zu geben?

Nur wenn der Divisor eine ganze Zahl ist, bezeichnet die Sprache auch diese Bedeutung der Division durch ein eigenes Wort. Der Quotient soll nämlich alsdann eben so oft im Dividend vorkommen, wie die Einheit im Divisor. Man hat folglich den Dividend in so viele gleiche Theile zu zerlegen, als der Divisor verlangt. Die Division erscheint (dem Wortsinne gemäß) als **Eintheilung** einer Zahl in eine vorgeschriebene Menge gleicher Theile.

Man kann den doppelten Sinn einer Divisionsaufgabe durch die beiden Fragen unterscheiden: »**Wie vielmal** (wie oft) ist der Divisor im Dividend enthalten?« — und »**Welche Zahl** ist so vielmal im Dividend enthalten, als der Divisor anzeigt?« oder, Was ist der so **vielte** Theil des Dividends, als der Divisor angiebt?« — vorausgesetzt, daß im ersten Falle der Quotient, im zweiten der Divisor eine ganze Zahl ist.

Wiederholung dieser Fragen an einem Beispiele, mit hinzugefügter Antwort.

4. Beide Bedeutungen der Division sind aber nur dann zugleich zulässig, wenn beide gegebene Zahlen unbenannt sind.

Weßhalb?

Sind dagegen Dividend und Divisor gleich benannte Zahlen, so kann die Aufgabe nur in dem ersten Sinne als Vergleichung genommen werden: ist aber der Dividend benannt, der Divisor unbenannt, so gestattet sie nur die zweite Auslegung.

Weßhalb? — Beispiele. — Wie ist in jedem dieser beiden Fälle der Quotient beschaffen? — Warum müssen Dividend und Divisor, beide als benannt angenommen, **gleich** benannt sein? — und weßhalb ist des Falles nicht gedacht, daß der Dividend eine unbenannte, und der Divisor eine benannte Zahl sei?

5. Bei der wirklichen Ausführung der Division in ganzen Zahlen dringt sich die Unterscheidung von drei Fällen auf. Der Dividend ist nämlich entweder größer oder kleiner als der Divisor, und im ersten Falle entweder ein genaues Vielfaches des letzteren oder nicht.

a) Die einfachste Annahme würde sein, daß der Dividend durch Multiplication des Divisors mit einer anderen ganzen Zahl entstanden wäre. Soll dieß der Fall sein, so muß der Dividend ein genaues Vielfaches*) des Divisors sein, folglich durch wiederholtes Addiren des letzteren zu sich selbst vollständig hergestellt, oder durch wiederholtes Abziehn desselben gänzlich aufgehoben werden können.

Soll alsdann die Division als Vergleichung gedacht werden, so hat man nur zu zählen, wie vielmal der Divisor zu sich selbst gesetzt werden muß, um den Dividend zu erzeugen, oder wie oft der Divisor vom Dividend bis zur völligen Erschöpfung des letzteren weggenommen werden kann.

Ist dagegen die Aufgabe der Division so zu verstehen, daß man den so vielten Theil des Dividends bestimmen soll, als der Divisor vorschreibt; so kann man sich gleichfalls erst den Dividend in lauter Stücke aufgelöst denken, welche dem Divisor gleich kommen, um den verlangten Theil, anstatt vom ganzen Dividend auf einmal, erst von jedem dieser Theile einzeln zu nehmen. Der sovielte Theil einer Zahl, als sie selbst Einheiten enthält, ist aber die Einheit selbst. Man bekommt folglich von jedem der genannten Stücke eine Einheit, und der Inbegriff aller gewonnenen Einheiten ist der gesuchte Theil des Dividends.

Man erhält daher zum Quotienten durch das eine wie durch das andere Verfahren eine ganze Zahl, welche so viele Einheiten enthält, als im Dividend Stücke vorkommen, die dem Divisor gleich sind. — In diesem Falle sagt man, die Division *geht auf*.

Erläuterung der beiden Rechenmethoden durch ein Beispiel. Welchen Quotienten erhält man unter der besonderen Voraussetzung, daß der Dividend dem Divisor gleich ist?

b) Wird nun aber zweitens der Dividend kleiner als der Di-

*) Das Wort »Vielfaches« mag um Weitläufigkeiten des Ausdrucks zu vermeiden, als Bezeichnung der Vorstellung, daß ein Ding, eine Größe oder Zahl gewisse Male gesetzt ist, wenn die nähere Bestimmung, wie vielmal dieß geschehen, keinen wesentlichen Unterschied begründet, auch die besondere Voraussetzung unter sich begreifen, daß jenes Ding, jene Größe oder Zahl nur *einmal* gedacht wird. Das Einfache erscheint bei diesem uneigentlichen Gebrauche des Wortes »Vielfaches« bloß als besonderer Fall des letzteren, obgleich beide Begriffe in anderer Beziehung einander gerade entgegengesetzt sind.

visor angenommen (z. B. 3 : 5), so leuchtet ein, daß der Quotient keine ganze Zahl mehr werden kann.

Soll nämlich in diesem Falle der Quotient die Art und Weise ausdrücken, wie der Dividend aus dem Divisor entstanden ist, so ist klar, daß weder einmaliges noch wiederholtes Setzen des letzteren als des Größeren (5), den Dividend, als das Kleinere (3), hervorbringen kann. Der Divisor muß also zuerst in aliquote Theile zerlegt worden sein. Die Zerlegung in Einheiten (5) giebt sein Begriff als ganze Zahl unmittelbar an. Durch Wiederholung eines solchen Theils, der Einheit, läßt sich aber allemal der Dividend, ebenfalls eine ganze Zahl, erzeugen. Der Quotient hat demnach vorzuschreiben, daß ein Ganzes (der Divisor) in so viele gleiche Theile zerlegt werde, als der Divisor Einheiten enthält, (hier 5), und daß ein solcher Theil (die Einheit) so vielmal genommen werde, als der Dividend Einheiten zählt (hier 3mal). Beides leistet ein Bruch, dessen Nenner der Divisor, dessen Zähler der Dividend ist, (hier $\frac{3}{5}$).

Verlangt hingegen der Sinn der Division eine Eintheilung des Dividends in die vom Divisor bezeichnete Menge gleicher Theile, so darf man den gesuchten Theil, (den fünften im vorigen Beispiele) — da derselbe keine ganze Einheit, viel weniger mehre enthalten kann — statt vom ganzen Dividend (3) auf einmal, zuerst auch von jeder seiner Einheiten nehmen ($\frac{1}{5}$), um nachher die so erhaltenen, gleichvielten Theile in einen Inbegriff zu vereinigen ($\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$). Der Quotient wird demnach ein Bruch, in welchem der so vielte Theil der Einheit, als der Divisor vorschreibt, so vielmal gesetzt ist, als der Dividend angiebt.

Wie man folglich auch in dieser zweiten Voraussetzung die Aufgabe der Division anzusehen hat, ob als Vergleichung oder als Eintheilung, so erhält man zum Quotienten doch wieder dieselbe Zahl, nämlich einen Bruch, dessen Zähler der Dividend, dessen Nenner der Divisor ist.

Ist $a < b$ (a »kleiner als« b, oder b »größer als« a), so ist

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Anmerk. Das Zeichen der Ungleichheit $<$ oder $>$ muß die Oeffnung nach der Seite des Größeren kehren.

c) In der dritten Voraussetzung endlich ist der Dividend zwar größer als der Divisor, enthält aber außer einem Vielfachen desselben noch ein Stück, welches kleiner ist als dieser. Augenscheinlich vereinigt dieser Fall nur die beiden vorigen in sich. Wäre daher der Dividend in die beiden genannten Stücke zerlegt, so dürfte jedes für sich nach der dafür bestimmten Regel dividirt werden. Indem man aber nach der ersten Vorschrift den Divisor so oft, als es sich thun lässt, aus dem Dividend heraushebt, ergiebt sich diese Zerlegung von selbst. Der Quotient setzt sich demgemäß aus einer ganzen und gebrochenen Zahl zusammen. So ist z. B. $7 : 3 = 2\frac{1}{3}$; denn $7 = 6 + 1 = 3 . 2 + 1$.

Man sieht indessen leicht ein, daß auch in diesem Falle und überhaupt immer, wenn Dividend und Divisor ganze Zahlen sind, ohne Rücksicht auf das Verhältniß ihrer Größe, die für die zweite Voraussetzung entwickelte Regel angewandt werden kann. Hiernach läßt sich der Quotient aus jeden zwei beliebigen ganzen Zahlen in Form eines Bruches darstellen, der den Dividend zum Zähler, den Divisor zum Nenner erhält. Man schreibt deßhalb auch schon eine aufgegebene Division in dieser Form.

$a : b = \frac{a}{b}$, unter a und b ganze Zahlen verstanden, welche man will.

In wiefern sind gleichwohl die beiden Vorstellungen, welche man mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet, je nachdem man diesen Ausdruck als Andeutung eines Quotienten oder eines Bruchs nimmt, von einander verschieden?

Umgekehrt fließt hieraus von selbst die Regel, wie man einen unechten Bruch in eine ganze oder gemischte Zahl (ganze mit angehängtem echtem Bruch) zu verwandeln hat, indem man diesen als Divisionsaufgabe ansieht.

Welche?

Die Regeln für das Dividiren mit Zahlen von zusammengesetzter Form ergeben sich, dem Begriffe dieser Rechnungsart zufolge, durch bloße Umkehrung der entsprechenden Multiplicationsregeln. Die wichtigsten derselben sind folgende.

6. Ist der Dividend ein Product von Factoren, so kann man die verlangte Division, statt an dem zuvor berechneten Producte, auch an einem seiner Factoren (gleichviel an welchem) vollziehn, und den Quotienten wieder mit den übrigen multipliciren — kürzer: Division eines Factors in einem Producte ist Division des ganzen Products.

z. B. $(6 \cdot 8) : 2 = (6 : 2) \cdot 8 = (8 : 2) \cdot 6$

$[= 48 : 2 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 24]$.

Allgemein $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = (b : c) \cdot a$

Auf welche Multiplicationsregel gründet sich die vorstehende?

Wie müßten die vorigen Ausdrücke geschrieben werden, wenn die angedeuteten Quotienten die Bruchform annehmen sollten?

Wann geht die Division in Buchstaben auf?

Wie sind die Aufgaben $(a \cdot b) : b = ?$ und $(a \cdot bc) : c = (ac \cdot b) : c = ?$ zu entwickeln?

Beispiele, wo die Anwendung der zweiten Vorschrift Rechnungsvortheile gewährt, — ähnlich diesem: den achten Theil von 7 Pfd. zu finden, in Lothen ausgedrückt.

Der vorige, durch die Formel $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$ ausgedrückte Satz kann auch so ausgesprochen werden: die Ordnung, in welcher Multiplication und Division an einer Zahl mit anderen verrichtet werden, ist gleichgültig für das Resultat.

7. Um durch ein Product von Factoren zu dividiren, darf man erst durch einen Factor, den erhaltenen Quotienten durch einen andern u. s. f. also durch einen Factor nach dem andern dividiren. Die Ordnung, welche man dabei unter den Factoren des Divisors befolgt, hat keinen Einfluß auf die Größe des Quotienten.

z. B. $24 : (2 \cdot 3) = (24 : 2) : 3 = (24 : 3) : 2$

$[= 12 : 3 = 8 : 2 = 4]$

Allgemein $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$

Auf welche Multiplicationsregel gründet sich die vorstehende?

Zur Erläuterung derselben Aufgaben wie diese:

3 Arbeiter erhalten für 8tägige Arbeit 48 Rthl., wie viel beträgt ein Tagelohn? — auf dreifache Art zu berechnen.

Die Zusammensetzung der beiden vorigen Regeln bedarf keiner neuen Vorschrift. Für das Rechnen mit allgemeinen Zahlensymbolen ergiebt sich aus ihnen, zusammengenommen mit der Vorschrift für die Darstellung des Quotienten in Bruchform, um diesen in der kürzesten Form zu erhalten, folgendes Verfahren.

Man hebt diejenigen Factoren, welche im Dividend und Divisor zugleich vorkommen, gegen einander auf und bildet aus den übrig bleibenden einen Bruch, welcher die des Dividends zum Zähler und die des Divisors zum Nenner erhält;

z. B. abc : bcdf $= \frac{a}{df}$

Die Quotienten aus 8aar : 6arrx, 3ac : 3abcm und ähnlichen Aufgaben in kürzester Form.

Wenn man in den beiden vorhergehenden Regeln Voraussetzung und Folge gehörig umstellt und das Verhältniß von Multiplication und Division zu einander berücksichtigt; so lassen sich dadurch sechs (unter anderen Beziehungen und Benennungen später auch in der Bruchrechnung vorkommende) Sätze ableiten, welche die Antworten auf folgende Fragen enthalten: Welchen Einfluß hat es auf den Quotienten, wenn man den Dividend, oder den Divisor, oder beide zugleich mit einer anderen Zahl multiplicirt, oder durch dieselbe dividirt?

Auszuführen.

8. Ist der Dividend aus Theilen zusammengesetzt, subtractive mit eingeschlossen, so kann man die am Ganzen zu verrichtende Division auch mit jedem seiner Theile vornehmen und die einzelnen Quotienten auf dieselbe Art, durch Addition oder Subtraction, verbinden, wie die Theile des Dividends, aus denen sie entsprungen sind, verbunden waren.

$(ad + bd - cd) : d = a + b - c$

Von welchen Multiplicationsregeln ist diese die umgekehrte?

Beispiele in Zahlen, zumal benannten, wo das hier beschriebene Verfahren natürlicher und bequemer ist, als wenn man erst den Dividend in eine einzige Zahl zusammenziehen wollte (z. E. 30 Ruthen 7 Fuß 6 Zoll in drei gleiche Theile zu theilen). Dieser ist einmal als Summe, ein anderes Mal als Differenz anzunehmen.

Zusammengesetztere Beispiele in Buchstaben.

9. Besteht der Divisor aus Theilen, subtractive nicht ausgeschlossen, so kann man ihm entweder absichtlich diese Form lassen

wollen, oder auch, wie in Buchstabenausdrücken, dazu genöthigt sein. Jedenfalls ließe sich alsdann der Quotient (nach 5, c) als Bruch darstellen, dessen Nenner der Divisor wird, und sehr oft ist diese Gestalt des Quotienten die kürzeste, z. B. $a:(b+c) = \frac{a}{b+c}$. Sollte es jedoch möglich sein und verlangt werden, denselben in einfacherer Gestalt zu entwickeln, so wird man dazu nur durch Versuche gelangen können.

Man dividirt zu dem Ende mit einem schicklich gewählten Theile des Divisors in einen willkürlich angenommenen oder gegebenen Theil des Dividends. In Buchstaben namentlich muß immer zugleich auch der Dividend schon in Theilen gegeben sein, wenn eine fernere Entwickelung des Quotienten möglich sein soll. —

Weßhalb?

Mit dem gefundenen Quotienten ist hierauf der ganze Divisor (oder jeder Theil desselben) zu multipliciren (§. **10. 5** und **6**), um den Inbegriff der dadurch gewonnenen und nach bekannten Regeln verknüpften Producte vom Dividend zu subtrahiren. Erst nachdem dieses geschehen ist, darf der vorläufig angenommene Quotient als richtig beibehalten werden. Dieser ist vollständig der gesuchte, wenn nach Abzug jener Producte vom Dividend Nichts mehr übrig bleibt;

z. B. $(ad + bd - cd) : (a + b - c) = d$;

denn $(a + b - c) \,.\, d = ad + bd - cd$, vom Dividend subtrahirt, giebt o.

Bleibt aber nach dieser ersten Subtraction vom Dividend noch ein Rest, so verfährt man mit ihm aufs Neue ganz so, wie vorhin. Der neu gefundene Quotient wird als Theil dem vorigen hinzugefügt (§. **10. 7**). Ueberhaupt aber wiederholt sich das nämliche Verfahren der versuchsweisen Bestimmung eines Theils des Quotienten, seiner Multiplication mit dem ganzen Divisor und der Subtraction daraus hervorgehender Producten-Reihen so lange, als der Dividend noch nicht völlig erschöpft ist. Die Rechnung schließt sich entweder von selbst, wenn vom Dividend kein Rest mehr übrig bleibt, die Division folglich aufgeht; oder man bricht sie ab, wenn sie bei weiterer Fortsetzung entweder nothwendig einen Bruch zum Quotienten, oder doch unaufhörlich neue Reste liefern müßte.*) In diesem Falle hängt man dem schon berechneten Quotienten noch einen Bruch an, dessen Zähler der letzte Rest, und dessen Nenner der Divisor wird.

Im Verlaufe der allmähligen Entwickelung des Quotienten, namentlich aus Buchstabenausdrücken, kann sich sehr wohl der Fall ereignen, daß der zur ferneren Division vorliegende Rest entweder aus lauter subtractiven Theilen besteht, oder doch in Beziehung auf den Divisor als subtractiv angesehen werden muß. Auch in diesem Falle ändert sich die Methode der Rechnung nicht. Man sieht aber leicht ein, daß der zum Quotienten neu hinzukommende Theil alsdann selbst subtractiv zu nehmen ist. — Um überhaupt mit Leichtigkeit zu bestimmen, auf welche Art sich die allmählig gefundenen Theile des Quotienten dem ersten anreihen müssen, thut man wohl, zur versuchsweisen Berechnung derselben stets einen nicht subtractiven Theil des Divisors zu gebrauchen. Alsdann erhält nämlich der neue Theil des Quotienten dasselbe Rechnungszeichen, wie derjenige Theil des Dividends, an welchem gerade die Operation vollzogen wird.

Das bisher beschriebene Verfahren wird durch nachstehendes Beispiel, in welchem die Rechnung vollständig angedeutet ist, noch mehr Anschaulichkeit gewinnen.*)

$$\begin{array}{lll}
 & 6aaa + 19aab + 8abb - 5bbb & \Big| : (2a + 5b) \\
\text{subtrahirt} & 6aaa + 15aab\ [= (2a + 5b) . 3aa] & \Big| = 3aa + 2ab - bb \\
\text{bleibt Rest} & \quad 4aab + 8abb - 5bbb & \\
\text{subtrahirt} & \quad 4aab + 10abb\quad [= (2a + 5b) . 2ab] & \\
\quad\text{bleibt Rest} & \qquad - 2abb - 5bbb & \\
\quad\text{subtrahirt} & \qquad - 2abb - 5bbb\quad [= - (2a + 5b) . bb] & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

---

*) Nur für besondere Zwecke kann es unter dieser Voraussetzung Interesse haben, den Quotienten auf dem angezeigten Wege ins Unbestimmte fort weiter zu entwickeln.

**) Da es in besonderen Fällen nicht gleichgültig ist, welche Theile des Dividends man zur versuchsweisen Bestimmung des Quotienten auswählt, insofern es darauf ankommt, diesen auf dem kürzesten Wege zu finden, so

Nach diesem Vorbilde sind ähnliche Beispiele zu berechnen, namentlich ein solches, in welchem auch der Divisor wenigstens einen subtractiven Theil enthält, und ein anderes, in welchem die Division für den Quotienten zwar einen oder mehre Theile in Form ganzer Zahlen liefert, zuletzt aber doch nicht aufgeht.

§. 12.

Absonderung gemeinschaftlicher Factoren.

1. Die Zerlegung eines Products in Factoren erhielt als Aufgabe der Division erst dadurch völlige Bestimmtheit, daß der eine dieser Factoren gegeben wurde. Lässt man diese Angabe weg, so bleibt die Auflösung eines Products in seine Factoren durchaus willkürlich. Dessenungeachtet wird die Lösung dieser Aufgabe bei manchen Rechnungen, namentlich mit allgemeinen Größenzeichen, als nothwendig oder vortheilhaft gefordert. Ihre Unbestimmtheit pflegt dabei meistens durch einen besonderen Rechnungszweck oder durch die Form des gegebenen Ausdrucks selbst beschränkt zu werden.

Am häufigsten wird verlangt, wenn ein Ausdruck aus Theilen besteht und die Form eines Productes hat, welches durch Multiplication mehrtheiliger Factoren entstanden ist, diese Factoren selbst wieder herzustellen. Um aber einen Inbegriff von Theilen als ein entwickeltes Product ansehen zu können, muß in jedem derselben die Zahl oder der Buchstabe als Factor enthalten sein, welcher der eine Factor des ganzen Productes gewesen sein soll. Man nimmt also diesen Factor aus allen Theilen, denen er gemeinschaftlich ist, heraus (oder dividirt sie durch ihn), zieht die übrig bleibenden Factoren (oder Quotienten) der einzelnen Theile selbst wieder als Theile in einen Inbegriff zusammen und setzt diesen als den zweiten Factor des Products an. Die letzteren müssen durch Addition oder Subtraction verbunden werden, jenachdem die Theile des Products, aus denen sie entsprangen, selbst auf die eine oder andere Art ver-

---

könnte man auch dafür noch besondere Regeln verlangen. Diese müssten jedoch zu weit auf Einzelnheiten eingehen, (ohne gleichwohl erschöpfend sein zu können), als daß sie nicht besser der eigenen Erfindung des Rechners überlassen blieben. Eine und die andere, wie sie sich von selbst darbietet, wird der Schüler zweckmäßig in seinen schriftlichen Arbeiten anmerken.

bunden waren. Man nennt dieses Geschäft die Absonderung gemeinschaftlicher Factoren. So findet man z. B.
$am + bm - cm = m . (a + b - c)$.

Zusammengesetztere Beispiele, wo sich gleichzeitig mehre Factoren absondern lassen.

2. Hat ein Ausdruck die Gestalt eines aus zwei mehrtheiligen Factoren entwickelten Productes, so lassen sich diese Factoren durch wiederholte Anwendung des vorhin beschriebenen Verfahrens wieder auffinden. Man ordnet zuerst alle diejenigen Theile, in welchen man einen gemeinschaftlichen Factor entdeckt, zusammen, sondert diesen aus, und verfährt mit dem zusammengesetzten Factor wieder ebenso, wenn derselbe mehren Gliedern*) gemein ist. So ist z. B.

$am + bm + ar + br$
$= (a + b) . m + (a + b) . r$
$= (a + b) . (m + r)$, oder wenn man zuerst nach den gemeinschaftlichen Factoren a und b zusammenordnet,
$= a (m + r) + b . (m + r)$
$= (a + b) . (m + r)$ wie vorhin.

3. Befinden sich unter den Theilen des Products auch subtractive, so hängt die Möglichkeit einer wiederholten Absonderung gemeinschaftlicher Factoren nicht selten von der richtigen Wahl der Rechnungsart ab, durch welche man die ersten Zusammenfassungen verbunden annehmen will. Je nachdem man eine folgende Zusammenfassung als additiv oder subtractiv ansetzt, ändern sich auch die Rechnungszeichen vor den in Klammern eingeschlossenen Theilen. Der Zweck einer zweiten Zusammenfassung kann allein darüber entscheiden, welche von den beiden gleich zulässigen Annahmen zu wäh-

*) „Glied" eines arithmetischen Ausdrucks bezeichnet jeden in sich abgeschlossenen Theil desselben, welcher von anderen völlig getrennt, oder nur noch durch Addition oder Subtraction (+ oder —) mit ihnen verbunden ist. Ein Glied kann daher einfach oder zusammengesetzt, z. B. ein Product aus einfachen oder mehrtheiligen Factoren, ein Quotient u. dergl. sein. Die zweigliedrige Form $1 + (a - b) . c$ hat entwickelt, als $1 + ac - bc$, drei Glieder.

len ist. So würde z. B. $am - bm - ar + br$ eben so gut

$$= (a - b) \,.\, m + (b - a) \,.\, r$$

als

$$= (a - b) \,.\, m - (a - b) \,.\, r$$

zu setzen sein. Um aber eine neue Absonderung vornehmen zu können, ist der zweite Ausdruck beizubehalten, welcher sich in $(a - b) \,.\, (m - r)$ zusammenzieht.

Aehnliche und zusammengesetztere Beispiele.

4. Sind die einzelnen Theile eines entwickelten Products aus mehr als zwei Factoren zusammengesetzt, unter denen manche in einigen oder allen Theilen vorkommen, so lässt sich oft durch Absonderung gemeinschaftlicher Factoren derselbe Werth in mehr als einer Form darstellen.

Man versuche dieses z. B. mit dem Ausdruck $120abmr - 60abrx + 80cmr - 40crx$.

5. Die Zusammensetzung einer entwickelten Form aus mehrtheiligen Factoren giebt sich aber nicht immer gleich so deutlich zu erkennen, besonders dann nicht, wenn im entwickelten Producte Zusammenziehungen oder Aufhebungen gleichartiger Glieder vorgefallen sind. Wie man sich bei der Wiederauflösung solcher zusammengezogener Producte zu verhalten habe, lässt sich nicht durch allgemeine Vorschriften bestimmen. Ein Beispiel der einfacheren Art mag als Anleitung zur Behandlung ähnlicher Aufgaben dienen.

Wäre $15aa + 21ac - ab + 7bc - 2bb$ gegeben, so ließe sich der dritte Theil ab eben so gut mit den beiden ersten zusammennehmen, um aus ihnen a, als auch mit den beiden letzten, um aus ihnen b als gemeinschaftlichen Factor auszusondern. Man lässt daher diesen Theil, weil in beiden Annahmen keine fernere Zusammenziehung möglich ist, vorläufig für sich stehen und erhält

$$3a \,.\, (5a + 7c) - ab + b \,.\, (7c - 2b).$$

Um nun die in Klammern eingeschlossenen Ausdrücke, welche beide $7c$ enthalten, zur völligen Uebereinstimmung zu bringen, müsste im ersten $-2b$, im zweiten $+5a$ hinzugefügt werden. Die Einführung dieser beiden Theile in die bezeichneten Factoren würde voraussetzen, daß im Producte die beiden Theile $-6ab$ und $+5ab$ vorhanden gewesen wären. Aus ihrer Vereinigung entspringt aber — ab, welches wir wirklich vorfinden. Setzen wir also statt dessen gleich im anfänglichen Ausdrucke — 6ab + 5ab, so erhalten wir

$$15aa + 21ac - 6ab + 5ab + 7bc - 2bb$$
$$= 3a.(5a + 7c - 2b) + b.(5a + 7c - 2b)$$
$$= (5a + 7c - 2b).(3a + b).$$

B.

6. Als besonderen Fall, wo die Aufhebung einzelner Glieder im Producte die Factoren desselben beinahe unkenntlich macht, merke man sich noch folgende Formel:

$$(a + b).(a - b) = aa - bb,$$

welche rückwärts zur Wiederauflösung eines Products, welches in der letzten Gestalt gegeben ist, bei manchen Rechnungen mit Vortheil angewandt wird.

Der Sinn dieser Formel ist in Worten auszudrücken.

§. 13.

Primzahlen.

1. Wenn die zur Addition, Subtraction oder Multiplication gegebenen Zahlen ganze waren, so wurde auch das Resultat selbst wieder eine ganze Zahl. Die Division einer ganzen Zahl durch eine andere giebt aber keineswegs immer auch zum Quotienten wieder eine solche, selbst dann nicht, wenn der Divisor die kleinere Zahl ist. Es lässt sich also nicht jede ganze Zahl als Vielfaches jeder beliebigen anderen, wenn auch kleineren, oder als Product aus ihr und einer zweiten ganzen Zahl ansehen. Ja es giebt unter den ganzen Zahlen auch solche, welche schlechterdings gar *nicht als Producte aus kleineren ganzen Zahlen zusammengesetzt, folglich überhaupt durch keine andere ganze Zahl, außer eins* (was sich von selbst versteht), *ohne Rest dividirt werden können*. Diese heißen *Primzahlen* (numerus primus) oder *einfache Zahlen*. Die kleinsten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13 rc.

Die Reihe der Primzahlen unter hundert? Beschreibung der Methode, wie dieselben durch Abzählen gefunden werden. Paare und unpaare Zahlen.

2. Diejenigen ganzen Zahlen nun, welche keine Primzahlen sind, lassen sich eben deßhalb noch durch kleinere ganze Zahlen ohne Rest dividiren und aus diesen als Factoren zusammensetzen oder in dieselben auflösen. Weil aber diese Zerlegung so lange fortgesetzt werden kann, als die Factoren selbst noch keine Primzahlen sind, so ist klar, daß sich jede nicht einfache oder zusammengesetzte ganze Zahl in ein Product aus lauter einfachen oder Primzahlen auflösen läſſt, welche man auch wohl ihre Primfactoren nennt.

So ist z. B. $12 = 4 \,.\, 3 = 2 \,.\, 6 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3$

Ebenso sind die Zahlen 10, 30, 48, 64, 72, 75, 84 oder andere in ihre Primfactoren aufzulösen.

§. 14.

Theilbarkeit der Zahlen.

Es versteht sich von selbst, daß eine zusammengesetzte Zahl durch jeden einzelnen Primfactor, den sie enthält, und auch durch alle möglichen, aus diesen zu bildenden Producte ohne Rest dividirt werden kann oder theilbar ist. So ist 12 durch 2, 3, 4 ($= 2 \,.\, 2$) und 6 ($= 2 \,.\, 3$) theilbar.

Ebenso sind für einige der vorhin aufgelösten Zahlen 1, alle von einander verschiedenen Primfactoren und 2, alle möglichen Producte verschiedenen Inhalts, welche sich aus den sämmtlichen Primfactoren der Zahl bilden lassen, in eine Reihe zusammenzustellen.

Es folgt aber zugleich aus dem Begriffe der Primzahlen, daß eine zusammengesetzte Zahl durch keine andere als die eben bezeichneten Zahlen — sie selbst und eins nicht mitgerechnet — ohne Rest dividirt werden kann.

2. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, braucht man nur zu zeigen, daß, wenn zwei beliebige Zahlen a und b, jede für sich, durch eine Primzahl p nicht theilbar sind, auch ihr Product a . b durch eben diese Primzahl p nicht ohne Rest dividirt werden kann.

Davon aber überzeugt man sich durch folgende Betrachtung. Eine von den beiden Zahlen a oder b, z. B. a, ist entweder größer oder kleiner als p. — Wäre $a > p$, so giebt a durch p dividirt, weil es nicht dadurch theilbar sein soll, einen Rest r, kleiner als p, und läſſt sich als ein Vielfaches von p, welches durch mp bezeichnet werden mag, nebst dem angehängten Reste r ausdrücken;

$a = mp + r$. Demnach würde

$ab = (mp + r) . b = mpb + rb$ sein.

Der erste Theil dieses Products, mpb, enthält den Factor p, ist also durch denselben theilbar. Soll daher das ganze Product, so muß auch sein zweiter Theil rb durch p ohne Rest dividirt werden können (Vergl. §. 11. 8).

Nun aber ist $r < p$, folglich weder r noch b für sich durch p theilbar, eben so wenig p durch r. Man kann daher p als ein Vielfaches von r ($m'r$) und einen neuen Rest, kleiner als r (er heiße r') darstellen; $p = m'r + r'$. Offenbar ist nun pb durch p theilbar, mithin müsste auch das gleichgeltende Product $(m'r + r') . b = m'rb + r'b$ durch p theilbar sein. Würde demnach angenommen, das Product rb, folglich auch $m'rb$ könne durch p ohne Rest getheilt werden, so müsste dasselbe von dem zweiten Theile des vorstehenden Products $r'b$ gelten.

Nun ist aber $r' < p$ ($r' < r < p$), mithin weder r' noch b durch p, und ebenso wenig p, als Primzahl, durch r' theilbar. Man darf daher wieder p als ein Vielfaches von r' ($m''r'$) nebst einem neuen Reste $r'' < r'$ ansehen, $p = m''r' + r''$. Es ist aber pb, also auch $(m''r' + r'') . b$ oder $m''r'b + r''b$ durch p theilbar. Soll daher die Division mit p in $r'b$, folglich auch in $m''r'b$ aufgehn, so müsste sie auch in $r''b$ aufgehn. — Derselbe Schluß lässt sich beliebig oft wiederholen.

Da nun die auf einander folgenden Reste r, r', r'' u. s. w. lauter ganze Zahlen sind und immer kleiner werden, so muß nothwendig einmal einer von ihnen $= 1$ werden, und man würde sich zu dem Schlusse geführt sehen, daß auch noch $1 . b$ oder b durch p theilbar sein müsste, was der Annahme, weder a noch b sei durch p theilbar, geradezu widerspricht.

Wäre $a < p$ angenommen, so dürfte man nur in der vorigen Schlußfolge gleich a statt r, welches auch kleiner als p sein sollte, an die Stelle setzen, und alles Folgende behielte seine Gültigkeit. Wenn daher zwei Zahlen a und b, jede für sich, durch eine Primzahl p nicht theilbar sind, so kann eben so wenig ihr Product a . b ohne Rest durch dieselbe dividirt werden.

Die ganze Schlußreihe ist an wirklichen Zahlen zu wiederholen.

3. Der Zusammenhang, in welchem der eben bewiesene Satz mit der obigen Behauptung steht, leuchtet ein.

Jede zusammengesetzte Zahl N ist ein Product aus lauter (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen a, b, c, d etc. Keine von diesen ist durch eine von ihnen verschiedene Primzahl p theilbar, also, weil a und b nicht, eben so wenig a . b, deshalb wieder auch (a . b) . c, folglich auch (a . b . c) . d und überhaupt das ganze Product dieser Primzahlen oder N nicht.

Sind nun p, q, r etc. von a, b, c, d etc. verschiedene Primzahlen, so wird das Product a . b . c . d . . . . . oder N, weil es nicht durch p, q oder r etc. allein theilbar ist, auch nicht durch Producte dieser Zahlen, (wenn auch nur eine von ihnen als Factor darin vorkommt), ohne Rest dividirt werden können. Denn die Division durch ein Product verlangt die Division durch jeden einzelnen Factor desselben (§. 11. 7). **Eine zusammengesetzte Zahl ist folglich nur durch ihre eigenen Primfactoren und deren Producte theilbar.**

Hierin liegt auch der Grund, weßhalb eine zusammengesetzte Zahl sich immer nur auf *eine* Weise in einfache Factoren auflösen läßt, so daß jede Zerlegung, sie mag anfangen, mit welchen Factoren man will, zuletzt immer doch auf dieselben einfachen Factoren führen muß. Indem man also, wie es früher verlangt wurde, diese einzeln setzt und aus ihnen alle möglichen Producte verschiedenen Inhalts bildet, erhält man vollständig die Reihe aller derjenigen Zahlen, mit welchen in die gegebene ohne Rest dividirt werden kann.

• Eine zusammengesetzte Zahl ist auf mehrerlei Art in einfache Factoren aufzulösen.

Factorentafel, welche die Zahlen von 1 bis 100 enthält.

§. 15.

Relative Primzahlen. — Gröſstes gemeinschaftliches Maſs zweier Zahlen.

1. Die Division einer Zahl durch eine andere geht also nicht

auf, so bald der Divisor nur irgend einen Primfactor enthält, welcher nicht zugleich im Dividend vorkommt. Enthalten zwei Zahlen gar keine gleiche einfache Factoren, so heißen sie **Primzahlen gegen** (in Beziehung auf) **einander** oder **relative Primzahlen**; z. B. 8 (= 2 . 2 . 2) und 15 (= 3 . 5), 12 (= 2 . 2 . 3) und 35 (= 5 . 7), 7 und 22 (= 2 . 11) u. a. — Im Gegensatze zu diesen werden die Primzahlen an sich auch **absolute** genannt.

Andere Beispiele.

2. Kommen dagegen in der zweiten Zahl auch solche Primfactoren vor, welche die erste enthält, so sind beide Zahlen durch diese und deren Producte theilbar. Eine Zahl, welche in zwei oder mehren anderen zugleich aufgeht, nennt man ein **gemeinschaftliches Maß** derselben.

Das **größte gemeinschaftliche Maß** zweier Zahlen ist also ein Product aus allen denjenigen Primfactoren, welche in beiden zugleich vorkommen. Das größte gemeinschaftliche Maß für 6 (= 2 . 3) und 10 (= 2 . 5) ist 2, für 8 (= 2 . 2 . 2) und 12 (= 2 . 2 . 3) das Product 2 . 2 oder 4 u. s. f.

Andere Beispiele.

3. Sind daher zwei Zahlen schon in ihre Primfactoren aufgelöst, so ist es leicht zu beurtheilen, ob dieselben ein gemeinschaftliches Maß haben oder nicht (Primzahlen gegen einander sind), und wenn sie ein solches haben, welches das größte ist. Müsste aber zuvor erst ausgemacht werden, ob zwei Zahlen, deren größtes gemeinschaftliches Maß gesucht wird, selbst schon Primzahlen sind, oder aus welchen Factoren sie bestehen, so würde diese Untersuchung (ohne Hülfe einer ausreichenden Factorentafel) nicht selten weitläufige und zum Theil nutzlose Versuche nöthig machen. Diese zu vermeiden, dient folgende Methode,

das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden.

Die beiden Zahlen heißen a und b, und a sei die größere von ihnen; so dividirt man zuerst mit der kleineren b in dieselbe. Geht die Division auf, so ist offenbar die kleinere Zahl b selbst das größte gemeinschaftliche Maß für beide. Bleibt ein Rest c, kleiner als b, so besteht die größere Zahl a aus diesem und einem Vielfachen des Divisors mb; in Zeichen, $a = mb + c$. Eine Zahl nun, die in b aufgeht, muß auch in mb aufgehen. Soll sie daher zugleich in a aufgehen, so muß auch der Rest c durch dieselbe theilbar sein. Die anfängliche Frage ist also jetzt auf die viel einfachere zurückgebracht: welches ist das größte gemeinschaftliche Maß für die kleinere Zahl b und den Rest c, welcher bei der Division der größeren durch sie übrig bleibt? Mit diesen beiden Zahlen kann man wieder wie mit den vorigen verfahren. Man dividirt mit dem Rest c in den vorigen Divisor b, da möglicher Weise c selbst das größte gemeinschaftliche Maß für beide Zahlen sein könnte. In diesem Falle ginge die Division auf; wo nicht, so ist b wieder in zwei Stücke, ein Vielfaches von c und einen Rest d, kleiner als c, zerlegt, und die anfängliche Aufgabe kommt darauf zurück, das größte Maß der beiden Zahlen d und c zu finden. Man wiederholt also dasselbe Verfahren, indem man mit jedem folgenden Reste in den vorhergehenden Divisor dividirt, so lange bis die Division aufgeht. Dieß muß nothwendig einmal geschehen, da jeder folgende Rest eine kleinere ganze Zahl wird, — wenn nicht eher, jedenfalls dann, wenn dieser Rest 1 geworden ist. Der erste Rest nun, mit welchem die Division in den vorigen Divisor aufgeht — wenn nicht schon die erste Division mit der anfänglich gegebenen kleineren Zahl in die größere aufging — ist das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß beider gegebener Zahlen. Ist dieser Rest 1, so sind die beiden Zahlen Primzahlen gegen einander.

Zur Erläuterung des Vorstehenden dienen folgende Beispiele.

Für 40 und 8 ist das größte gemeinschaftliche Maß 8 selbst, da $40 : 8 = 5$ ist.

Die Rechnung, um für 78 und 30 das größte gemeinschaftliche Maß zu finden, zeigt folgendes Schema:

```
         78 | : 30
         60 | = 2
      30 | : 18 (erster Rest)
      18 | = 1
   18 | : 12 (zweiter Rest)
   12 | = 1
12 | : 6 (dritter Rest)
12 | = 2
 0
```

Also ist 6 die gesuchte Zahl; 78 : 6 = 13, und 30 : 6 = 5. Für die Zahlen 20 und 9 erhält man folgende Rechnung

```
      20 | : 9
      18 | = 2
   9 | : 2
   8 | = 4
2 | : 1
2 | = 2
0
```

Also sind 20 und 9 Primzahlen gegen einander.

Für jeden dieser drei Fälle ist wenigstens ein Beispiel auszuführen.

Geübtere mögen auch, dem Gange der Rechnung zufolge, die der allmähligen Zerlegung entsprechende Zusammensetzung der gegebenen Zahlen aus immer kleineren Factoren — mit den nöthigen Voraussetzungen auch für Buchstaben — in Zeichen angeben.

Die Regel, für mehr als zwei Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß zu finden —?

Dritter Abschnitt.

Die vier einfachen Rechnungsarten mit ganzen Zahlen, welche nach den Regeln eines Zahlensystems künstlich gebildet sind.

---

§. 16.

Zweck und Aufgabe dieses Abschnitts.

Die vier einfachen Rechnungsarten in ganzen Zahlen auszuführen, reichen die Regeln des vorigen Abschnitts vollkommen aus. Auch auf solche ganze Zahlen, welche nach der früher (§. 4. und 5.) beschriebenen Methode künstlich gebildet und bezeichnet sind, können dieselben unmittelbar angewandt werden. Diese Zahlen sind, in der Kunstsprache des vorigen Abschnitts ausgedrückt, Summen von Producten. Jede Ziffer enthält einen Theil der Zahl, welcher als ein Product der von ihr bezeichneten Einermenge in die Einheit ihres Ranges anzusehen ist. So ist z. B.

$$5384 = 5 \,.\, 1000 + 3 \,.\, 100 + 8 \,.\, 10 + 4.$$

Für das Rechnen mit Zahlen dieser Form sind aber die nöthigen Vorschriften schon ausdrücklich angegeben, welche daher nur dem vorliegenden besonderen Falle angepasst zu werden brauchten. Der wirkliche Gebrauch künstlich zusammengesetzter Zahlen beim Rechnen — es versteht sich, daß die gegebenen Zahlen alle demselben Systeme angehören müssen — fordert aber außerdem auch einen möglichst einfachen und bequemen Mechanismus, wobei beständig das Ziel im Auge zu behalten ist, daß auch das Resultat selbst wieder als eine Zahl des nämlichen Systems dargestellt werde. Unter dieser Bedingung die (allgemein üblichen) Mechanismen der vier

Grundoperationen mit Zahlen desselben Systems aus ihren Gründen herzuleiten, ist die Aufgabe des gegenwärtigen Abschnitts.

§. 17.
Die Addition.

1. Um zusammengesetzte Zahlen desselben Systems zu **addiren**, muß man zuerst der Forderung genügen, daß die zu vereinigenden Theile gleichartig seien (§. 8. 4). Zu dem Ende schreibt man die gegebenen Zahlen so unter einander, daß ihre niedrigsten Ziffern (die Einer) und demgemäß alle Ziffern gleich hohen Ranges in Verticalreihen unter einander zu stehen kommen. Alsdann zählt man diese Reihen, von der niedrigsten aufsteigend, jede für sich, also nur gleich hohe Einheiten, zusammen. Die einzelnen Summen haben wieder den Rang ihrer Theile (§. 8. 4). Man setzt sie daher in der Ordnung, wie sie erfolgen, neben einander, so lange ihr Betrag die Grundzahl des Systems (bei dekadischen Zahlen zehn) nicht erreicht. Würde aber die Summe einer Reihe der Grundzahl gleich oder noch größer, so fasst man, so oft es angeht, eine der Grundzahl gleiche Menge zu einer Einheit nächst höherer Ordnung zusammen, sondert diese von den übrigbleibenden ab und schreibt nur die Ziffer, welche die Menge der letzteren angiebt, also 0, wenn gar keine Einheiten dieser Art übrig bleiben, an den ihr gebührenden Platz (d. h. unter die Reihe, welche gerade addirt wurde) in die Summe. Die abgesonderten Einheiten nächst höherer Ordnung werden zu der folgenden Reihe gleichen Ranges gesetzt und bei fortschreitender Addition mit dieser zusammengezählt. Die ganze Summe wird auf diese Weise eine nach demselben Gesetze, wie ihre Theile, gebildete Zahl.

Sind z. B. die dekadisch gebildeten Zahlen 324, 2841, 610, 80252 zur Addition gegeben, so nimmt die Rechnung folgende Gestalt an:

$$
\begin{array}{lr}
 & 324 \\
 & 2841 \\
 & 610 \\
 & 80252 \\
 & (2\;1) \\
\hline
\text{Summe} & 84027
\end{array}
$$

Wie nach der Grundzahl 5 gebildete Zahlen addirt werden, zeigt folgendes Beispiel:

$$\begin{array}{r} 1203 \\ 24010 \\ 421 \\ 3404 \\ (22\;\;1) \\ \hline 40043 \end{array}$$

Aehnliche Beispiele mit Zahlen aus einem anderen als dem dekadischen Systeme.

Weßhalb fängt man die Addition mit der niedrigsten Stelle an?

Weßhalb darf nur die niedrigste Ziffer von der mehrtheiligen Summe einer einzelnen Reihe in die Totalsumme geschrieben werden, so lange noch Theile höheren Ranges zu addiren übrig sind?

Auf welche Regeln des vorigen Abschnitts würde die Rechnung zurückzuführen sein, wenn man die Ziffern höherer Ordnung als Andeutungen von Producten nehmen wollte, deren einer Factor die Einheit derselben Ordnung wäre?

2. Wollte man von der Summe künstlich gebildeter, zumal großer Zahlen, wie es behufs bloß genäherter Bestimmungen öfters gefordert wird, nur die höchsten Stellen bis zu der eines bestimmten Ranges herab berechnet haben, so würde man, nachdem die Zahlen gehörig unter einander geordnet sind, gleich bei dieser, als der niedrigsten Stelle die Addition anfangen dürfen. Das Resultat fällt alsdann zu klein aus. Die Ungenauigkeit kann jedoch selbst im ungünstigsten Falle nicht so viele Einheiten der niedrigsten Ordnung betragen, als Zahlen zur Addition gegeben sind. Berechnet man auch noch die Summe von Einheiten der vorhergehenden Classe, so kann, bei nicht mehr als zehn Zahlen im dekadischen Systeme, die abgekürzte Summe um keine ganze Einheit der niedrigsten verlangten Stelle von der vollständig berechneten verschieden sein, wofern man auch noch die nächst niedrigere Ziffer beibehält. Wird diese aber weggelassen, so darf man nur behaupten, daß das Resultat bei vollständiger Berechnung höchstens um eine Einheit seines niedrigsten Ranges größer ausfallen könne.

So ist z. B. die Summe der Zahlen

5 3 8 6 1 4
2 0 7 3 4 0
3 8 1 2 8 1 7
4 0 9 2
5 6 9 1 3
(2 2)

bis auf Tausender berechnet, 4 6 1 9 * * *

Erläuterung dieser Bestimmungen an Beispielen.

§. 18.

Die Subtraction.

1. Die Subtraction einer zusammengesetzten Zahl von einer anderen verlangt, daß jeder Theil des Subtrahends (§. 9. 7) und zwar von einem gleichartigen des Minuends (§. 9. 4) weggenommen werde. Man setzt daher den einen so unter den anderen, daß ihre niedrigsten, mithin überhaupt Ziffern gleich hohen Ranges unter einander zu stehen kommen. Darauf subtrahirt man, mit dem niedrigsten anfangend, jeden Theil des Subtrahends von dem gleich hohen des Minuends und setzt die einzeln erfolgenden Reste, als Ziffern eben so hohen Ranges (§. 9. 4), in der nämlichen aufsteigenden Ordnung neben einander. So lange jeder Theil des Minuends nicht kleiner ist, als der abzuziehende des Subtrahends, ergeben sich die Reste von selbst. Die Bedingung, daß der Minuend den Subtrahend übertreffe, wird aber auch schon erfüllt, wenn jener nur entweder mit mehr Ziffern geschrieben wird, oder bei gleich vielen Ziffern, von oben an gerechnet, zuerst in gleich hoher Stelle eine größere Ziffer enthält, als der Subtrahend. Ereignet es sich dann, daß in einer niedrigeren Stelle ein Theil des Minuends kleiner ist als derjenige, welcher von ihm weggenommen werden soll, so borgt man eine Einheit von der nächst höheren Stelle, löst sie in ihre nächst niedrigeren Einheiten auf, nimmt die vorhandenen derselben Ordnung dazu und kann nun jedenfalls die Abziehung verrichten. Stehen in den höheren Stellen des Minuends Nullen, so ist man genöthigt, bis zur nächsten geltenden Ziffer hinaufzugehn, nimmt von ihr eine Einheit weg, löst sie in Ein-

heiten nächst niedrigerer Ordnung auf, borgt von diesen abermals eine Einheit und verfährt damit ebenso, bis man zu der Stelle gekommen ist, wo die Subtraction vorgenommen werden soll. Daß von einer höheren Ziffer des Minuends behufs einer früheren Subtraction schon eine Einheit weggenommen ist, muß bei ihr durch einen Punkt oder ein anderes beliebiges Zeichen bemerkt werden. An die Stelle der Nullen des Minuends, über welche man weggeborgt hat, treten Ziffern, welche um eine Einheit geringer sind, als die Grundzahl des Systems, welcher die gegebenen Zahlen angehören.

Uebrigens mag hier noch ein für allemal bemerkt werden, daß bei jeder Rechnungsart mit zusammengesetzten Zahlen, wenn im Resultate Einheiten einer niedrigeren Ordnung fehlen, die Stelle derselben mit **0** besetzt werden muß.

Das ganze Verfahren zeigt folgendes Schema

a. für dekadische Zahlen

$$
\begin{array}{r}
4\cdot3\ 8\cdot0\cdot0\cdot2\ 6\ 9 \\
-\ 8\ 4\ 0\ 1\ 5\ 6\ 4 \\
\hline
=\ 3\ 5\ 3\ 9\ 8\ 7\ 0\ 5
\end{array}
$$

b. für Zahlen, welche nach der Grundzahl **5** gebildet sind.

$$
\begin{array}{r}
1\ 2\ 4\cdot0\cdot0\cdot0\ 4\cdot1 \\
-\ 1\ 2\ 3\ 1\ 0\ 2\ 3\ 4 \\
\hline
=\qquad 3\ 4\ 3\ 0\ 2
\end{array}
$$

Beispiele mit Zahlen eines anderen als des dekadischen Systems, nebst den nöthigen Erläuterungen.

Auf welche Regeln des vorigen Abschnitts würde dieses Verfahren zurückkommen, wenn man jeden Theil der Zahl als ein Product der bezeichneten Einermenge in die Einheit seines Ranges ansehen wollte?

2. Verlangte man die Differenz zweier zusammengesetzter Zahlen nur näherungsweise bis zu der Ziffer eines bestimmten Ranges von oben herab, so dürfte man auch die Subtraction gleich bei dieser Stelle, als der niedrigsten, anfangen. Der Rest würde zu klein ausfallen, wenn der nachfolgende, unbeachtet gebliebene Theil des Minuends größer, zu groß, wenn derselbe kleiner wäre, als der gleich hohe Theil des Subtrahends. Die Unsicherheit des Resultats beträgt auf keinen Fall eine ganze Einheit seines niedrigsten

Ranges. Will man aber den Rest bis zu seiner letzten Ziffer richtig haben, so muß man denselben in Gedanken bis zu der nächsten tieferen Stelle berechnen, in welcher die gleich hohen Ziffern des Minuends und Subtrahends verschieden sind.

Erläuterung an Beispielen.

§. 19.

Die Multiplication.

1. Die Multiplication zusammengesetzter Zahlen lässt sich (nach §. **10. 7**) dadurch verrichten, daß man jeden Theil des einen Factors nach und nach mit jedem Theile des andern multiplicirt und die Producte in eine Summe vereinigt. Jeder Theil einer künstlich gebildeten Zahl kann aber als ein Product der bezeichneten Einermenge in die Einheit seines Ranges angesehen werden. Da nun mit einem Producte multiplicirt wird, indem man mit einem Factor nach dem anderen multiplicirt (§. **10. 9**), so braucht man nur mit jeder beliebigen Einerzahl und jeder Einheit höherer Ordnung die Multiplication verrichten zu können.

2. Ist aber der Multiplicator eine Einerzahl, so multiplicirt man mit ihr der Reihe nach jeden Theil des Multiplicands, von dem niedrigsten anfangend. Die einzelnen Producte zählen Einheiten desselben Ranges, wie die Theile des Multiplicands, aus welchen sie hervorgingen (§. **10. 2**). Man setzt sie daher in der Ordnung, wie sie erfolgen, neben einander, so lange dadurch die Rangordnung der Ziffern nicht gestört, d. h. so lange jedes Product nur mit einer Ziffer geschrieben wird. Wird dasselbe aber eine mehrziffrige Zahl, so schreibt man, wenn noch Producte höheren Ranges zu berechnen sind, vorläufig nur seine niedrigste Ziffer in das Resultat und zählt die Menge nächsthöherer Einheiten zu dem folgenden Partialproducte.

Die Gestalt der Rechnung

a. für dekadische Zahlen zeigt folgendes Beispiel:

$$
\begin{array}{r}
50684032 \\
\times\ 3 \\
\hline
= 152052096, \text{ zusammengezogen} \\
(2\ 2\ 1) \\
\hline
\text{aus} \quad 12096 \\
24 \\
18 \\
150 \\
\hline
\end{array}
$$

b. für Zahlen, welche nach der Grundzahl 5 gebildet sind, das nachstehende:

$$
\begin{array}{r}
42133041 \\
\times\ 3 \\
\hline
= 232004223 \\
(1\ 2\ 1\quad 2)
\end{array}
$$

Andere B.

Daß die Theile des Products den Rang bekommen, welchen die Theile des Multiplicands hatten, aus denen sie sich bilden, lässt sich auch aus der Vorstellung, diese letzteren seien Producte aus Einerzahlen in die auf einander folgenden Einheiten höherer Ordnung, mit Hülfe der §. 10. 8 angegebenen Regel herleiten. — Wie?

3. Mit einer Einheit höherer Ordnung wird ferner eine Zahl desselben Systems leicht dadurch multiplicirt, daß man ihr dieselbe Menge von Nullen anhängt, mit welcher jene Einheit geschrieben wurde. Denn indem einer Zahl eine Null angehängt, mithin jede Ziffer an den nächst höheren Platz gerückt wird, erhält jede Ziffer, folglich auch die ganze Zahl einen so viel mal größeren Werth, als die Grundzahl des Systems angiebt. Jede höhere Einheit ist aber ein Product, welches die Grundzahl so viel mal als Factor enthält, als die Menge von Nullen anzeigt, womit sie geschrieben wird. Hiernach ist z. B. (in jedem Zahlensystem)

$$32 \times 10 = 320$$
$$32 \times 1000 = 32000 \text{ u. s. w.}$$

Ein Product aus zwei Einheiten höherer Ordnung ist folglich selbst wieder eine Einheit höherer Ordnung, welche mit so vielen

Nullen geschrieben wird, als ihre Factoren zusammen enthielten; z. B. **100 . 1000 = 100000.**

Wie bestimmt sich also der Rang eines Productes von Einheiten höherer Ordnung aus dem Range seiner Factoren?

4. Das Verfahren, wenn der Multiplicator eine vielziffrige Zahl ist, ordnet sich nach diesen beiden Regeln von selbst. Man multiplicirt nach und nach mit dem niedrigsten und mit jedem folgenden Theile desselben, wie mit einer bloßen Einerzahl, nach der ersten Vorschrift (2), multiplicirt jedes Partialproduct außer dem niedrigsten mit der Einheit höherer Ordnung, welche sein Multiplicator zählt, indem man ihm die dieser Einheit zukommende Menge von Nullen anhängt, und vereinigt alle so gewonnenen Producte in gehöriger Stellung zu einer Summe.

Der gemeine Multiplications-Mechanismus erspart sich dabei auch noch das Schreiben von Nullen am Ende derjenigen Partialproducte, welche aus höheren Ziffern des Multiplicators entspringen, indem dieselben gleich so unter einander geordnet werden, daß jedes in dem Range seines Multiplicators endigt. Wenn daher zuerst mit der niedrigsten, dann mit der nächstfolgenden und so fort nach und nach mit jeder nächst höheren Ziffer des Multiplicators multiplicirt wird, so wird regelmäßig die Endziffer jedes folgenden Partialproductes eine Stelle nach links eingerückt — eine Stelle nach rechts hinaus dagegen, wenn die Rechnung bei der höchsten Ziffer des Multiplicators beginnt und stufenweise zu den niedrigeren Ziffern desselben fortschreitet. Kommen in höheren Stellen des Multiplicators Nullen vor, so überschlägt man für jede eine Stelle beim Auf- oder Niederrücken des folgenden Productes.

Hat der Multiplicator, oder auch der Multiplicand Nullen am Ende, so braucht man diese bei der Rechnung vorläufig gar nicht zu berücksichtigen, wenn nur zuletzt ihre Gesammtmenge dem Resultat angehängt wird.

Die hier beschriebene Rechnung mag durch nachstehende Beispiele versinnlicht werden

a) mit dekadischen Zahlen

```
mit aufsteigender Rangordnung      mit fallender Rangordnung
       der Producte                       der Producte
            308452                              308452
          × 63054                             × 63054
          -------                      -----------
           1233808                      1850712
          1542260                        925356
         925356                           1542260
        1850712                            1233808
  -------------                      ------------
  = 19449132408                      = 18449132408
```

b) mit Zahlen, welche nach der Grundzahl 5 gebildet sind,

```
         230410          oder          230410
       × 2043000                     × 2043000
       ---------                 ----------
         124223                   101132
        202314                     202314
       101132                       124223
  ---------------              ---------------
  = 1033344130000              = 1033344130000
```

Beispiele zumal mit Zahlen aus einem andern als dem dekadischen Systeme und in fallender Rangordnung der Productenschichten.

5. Die wesentliche Erleichterung, welche diese Methode der Multiplication zusammengesetzter Zahlen, in Folge des einfachen Gesetzes ihrer Bildung, verschafft, leuchtet von selbst ein. Die ganze Rechnung kommt der Hauptsache nach auf die Bildung von Producten aus je zwei Einerzahlen zurück. Alle diese Producte stellt das sogenannte Einmaleins zusammen, dessen Kenntniß man von jedem Rechner fordert.

Die Pythagoräische Tafel.

Für den Zweck der Division verdient noch ausdrücklich bemerkt zu werden, daß das Product aus zwei Einerzahlen höchstens eine zweiziffrige Zahl werden, und daß überhaupt ein Product, dessen einer Factor eine Einerzahl ist, höchstens eine Ziffer mehr enthalten kann, als der andere Factor, und in diesem Falle nach Absonderung seiner niedrigsten Ziffer eine kleinere Zahl darstellt, als eben dieser Factor.

Weßhalb?

6. Um bloß den höchsten Theil eines Productes aus vielziffrigen Zahlen bis zu der Ziffer eines vorgeschriebenen Ranges herab, etwa für genäherte Bestimmungen, zu berechnen, läßt sich leicht ein Mechanismus erdenken, welcher alle überflüssigen Rechnungen abschneidet.

a) Ist bloß der eine Factor — es sei der Multiplicand — eine vielziffrige, der andere eine Einerzahl, so beginnt man die Multiplication mit dieser gleich bei der Ziffer desjenigen Ranges im andern Factor, bis zu welchem das verlangte Product herabreichen soll.

Um aber die Richtigkeit desselben bis zu seiner letzten Ziffer verbürgen zu können, muß man auch die Producte aus den beiden nächst niedrigeren Ziffern des Multiplicands berechnen, und wenn ihre Summe in den nächst höheren Rang hinaufreicht, diesen Betrag in den letzten Theil des verlangten Productes mit aufnehmen. Berechnet man das Product (wie es öfter vorgeschrieben wird) nur auf eine Stelle tiefer, als verlangt wird, um mit Weglassung der letzten Ziffer bloß die Zehner des niedrigsten Partialproductes in das Resultat mit aufzunehmen, so bleibt man ungewiß, ob nicht die Endziffer desselben bei vollständiger Berechnung noch um eine Einheit erhöht werden müsste.

So ist z. B. das Product aus

$$\begin{array}{r} 43087|35924 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$$

bis auf Hunderttausender berechnet $= 258524.\,*\,*\,*\,*\,*$

Man würde die Endziffer 3 statt 4 erhalten haben, wenn man nur aus dem Producte nächstniedrigeren Ranges, 6 . 3 oder 18 Zehntausender, 1 Zehner zum Resultate gezogen hätte, während aus dem folgenden Producte 6 . 5 oder 30 Tausender noch 3 Zehntausender zu jenen 18 hinzukommen, folglich aus ihrer Summe, 21 Zehntausender, 2 Einheiten in die letzte Stelle des geforderten Productes eingehen.

Erläuterung obiger Bestimmungen an anderen Beispielen. — Weshalb kann das Product aus der dritten Ziffer des Multiplicands nach derjenigen, bis zu deren Range das Product entwickelt werden soll, auf das letztere keinen Einfluß mehr haben?

b. Ist auch der Multiplicator eine vielziffrige Zahl, so bilde man zuerst das Product seiner Einer den vorstehenden Bestimmungen gemäß. Alle ferneren Producte aus höheren Ziffern des Multiplicators werden alsdann bis zu dem nämlichen Range herab entwickelt werden, wenn man regelmäßig, so wie die nächsthöhere Ziffer des Multiplicators an die Reihe kommt, vom Multiplicand eine Ziffer mehr in Rechnung nimmt. Da nun alle diese Producte in gleich hoher Stelle abgebrochen sind, so müssen ihre Endziffern in eine Verticalreihe unter einander gesetzt werden, wodurch die übrigen von selbst in die gehörige Stellung kommen. Nur erst, nachdem die niedrigste Stelle des Multiplicands zur Multiplication gezogen ist, werden Producte noch höheren Ranges wie gewöhnlich eingerückt. Indem vorausgesetzt wird, daß jede Productenschicht bis zur letzten Ziffer richtig ist, darf man behaupten, daß das aus ihrer Addition entspringende Product, wenn auch zu klein, doch nicht um so viele Einheiten seiner niedrigsten Ordnung zu klein ausfallen könne, als verkürzte Producte in ihm liegen.

Die ganze Rechnung zeigt folgendes Beispiel, in welchem das Product bis auf Hunderttausender berechnet ist:

```
                [6 620723]*)
          43087|35924
        × 3270266
        ---------
           258524
          2585241
          8617471
       3016115146
       8617471848
     12926207772
     ------------
     140907125950   Hunderttausender.
```

Bei vollständiger Berechnung erhält man 2 statt 0 als Endziffer des abgebrochenen Productes; der größte Fehler hätte in diesem Falle 4 Einheiten der niedrigsten Ordnung betragen können. R.

*) Zur Versinnlichung des Verfahrens ist jede Ziffer des Multiplicators über diejenige des Multiplicands gesetzt, bei welcher die Multiplication mit ihr anhebt.

Wollte man die Producte aus den einzelnen Ziffern des Multiplicators in fallender Ordnung entwickeln, so würde man, so lange der Rang dieser Ziffern höher ist, als derjenige, in welchem das geforderte Product abbrechen soll, den oben (4) gegebenen Vorschriften folgen, und erst wenn der partielle Multiplicator unter diesen Rang herabsinkt, die Multiplication mit jeder folgenden Ziffer bei der nächst höheren des Multiplicands anheben lassen. Die Endziffern der abgekürzten Partialproducte werden natürlich mit der Endziffer des letzten vollständigen in eine Verticalreihe gestellt, um in dieser Ordnung addirt zu werden. Uebersteigt der niedrigste Rang des geforderten Productes den der höchsten Ziffer des Multiplicators, so hebt die Multiplication mit dieser bei einer Ziffer des Multiplicands an, deren Rang den ihrigen zu dem der niedrigsten Stelle des verlangten Productes ergänzt. Uebrigens bleibt das Verfahren wie vorhin; so wie man im Multiplicator eine Stelle abwärts geht, steigt man dafür im Multiplicand eine Stelle aufwärts.

Hiernach ordnet sich z. B. die Berechnung des vorigen Productes bis auf Zehnmillionen, wie folgt:

```
    [6 6 2 0 7 2 3]
   4 3 0 8 7 3 5 9 2|4
    ×  3 2 7 0 2 6  6
  -------------------
 1 2 9 2 6 2 0 7 7 7
     8 6 1 7 4 7 1 8
     3 0 1 6 1 1 5 1
           8 6 1 7 4
           2 5 8 5 2
             2 5 8 5
  -------------------
 1 4 0 9 0 7 1 2 5 7  Zehnmillionen.
```

Das Product fällt um 2 Einheiten der niedrigsten Ordnung zu klein aus, hätte aber möglicher Weise 5 solcher Einheiten zu klein werden können. B.

Man nennt die hier beschriebene Rechnung verkürzte Multiplication.

Anmerk. Berechnet man jedes einzelne verkürzte Partialproduct nicht völlig genau bis zu seiner Endziffer, sondern begnügt sich damit, in dasselbe nur die Zehner des unmittelbar vorhergehenden (nächst niedrigeren) Productes aufzunehmen, so lässt sich als Grenze für die Unsicherheit des ganzen Resultats nur so viel festsetzen, daß dasselbe nicht doppelt so viele Einheiten seines niedrigsten Ranges größer ausfallen könne, als verkürzte Producte in ihm vereinigt sind.

Vernachlässigt man die Producte, deren Rang unter den niedrigsten verlangten hinabgeht, ganz und gar, so kann man nur behaupten, daß das wahre Resultat nicht um so viele Einheiten der niedrigsten beibehaltenen Ordnung größer werden könne, als die Summe aller Ziffern des Multiplicators, welche in Thätigkeit gesetzt sind, anzeigt.

Alle diese Bestimmungen können aus ihren Gründen hergeleitet und durch Beispiele bestätigt werden.

§. 20.

Die Division.

1. Die Art, wie ein Product aus vielziffrigen Zahlen sich zusammensetzt, zeichnet auch schon den Weg vor, wie ein solches vermittelst seines einen Factors wieder aufgelöst werden kann. Bei der Division mehrtheiliger Zahlen überhaupt werden nach bekannten Vorschriften (II. 11, 8 und 9) die einzelnen Theile des Quotienten nach und nach berechnet. Die Division mit künstlich zusammengesetzten Zahlen macht nur eine besondere Anwendung von diesen Regeln. Auch die einzelnen Ziffern des Quotienten aus solchen Zahlen müssen nach einander durch Versuche aufgefunden werden. Diese Versuche müssen dazu dienen, den Dividend allmählig in lauter Partialproducte verschiedenen Ranges zu zerlegen, deren einer Factor allemal der Divisor, der andere ein Theil des Quotienten von eben so hohem Range, wie das abgesonderte Product, ist.

Man sieht leicht ein, daß mit der Bestimmung der höchsten Ziffer des Quotienten der Anfang gemacht werden muß. Zu dem Ende schneidet man im Dividend von der höchsten an so viele Stellen ab, als der Divisor enthält, wenn diese keine kleinere Zahl geben, als der Divisor ist, sonst noch eine mehr (§. 19. 5). Man legt diesem und in der Folge jedem ferner abgesonderten Theile des Dividends, als einem zusammengehörigen Ganzen, den Rang seiner letzten Ziffer bei. Nun sucht man diejenige Zahl — sie muß eine Einerzahl sein, §. 19. 5 —, deren Product mit dem Divisor dem abgesonderten Theile des Dividends am nächsten kommt, ohne ihn zu übertreffen. Sie ist der höchste Theil des Quotienten und vom Range des dividirten Theils. Nachdem das Product dieser Zahl mit dem Divisor von dem vorliegenden Stücke des Dividends abgezogen ist, vereinigt man mit dem übrig gebliebenen Reste die nächstniedrigere Ziffer des Dividends, also die höchste seines noch unberührten Theils, beschließt damit ein neues Stück desselben vom nächstniedrigeren Range und verfährt mit diesem wieder ebenso, wie mit dem vorhergehenden. Die gefundene Zahl, auf keinen Fall über die Einer hinausgehend, hat den Rang des neu abgesonderten Theils vom Dividend, schließt sich also der zuerst gefundenen als nächstniedrigerer Theil des Quotienten unmittelbar an. Wäre aber jenes in die erste tiefere Stelle herabreichende Stück des Dividends noch kleiner als der Divisor, so bemerkt man im Quotienten mit dem Zeichen 0, daß derselbe keine Einheit dieser Ordnung erhalten könne. Im einen, wie im anderen Falle fügt man dem Reste, welchen die früheren Divisionen ließen, die folgende Ziffer des Dividends hinzu und beginnt mit dem so begrenzten Theile die Operation aufs Neue. Dasselbe regelmäßig wiederkehrende Verfahren liefert der Reihe nach in fallender Ordnung alle Ziffern des Quotienten. Die letzte wird gefunden, wenn auch die letzte Ziffer des Dividends mit in Thätigkeit gesetzt ist. Hiermit schließt sich die Rechnung. Bleibt nach Wegnahme des niedrigsten Partialproductes aus dem Divisor in die Einer des Quotienten vom Dividend noch ein Rest, so bildet man aus diesem und dem Divisor nach bekannten Regeln einen Bruch, als Ergänzung des Quotienten.

Die Versuche, durch welche ausfindig gemacht werden muß, was für ein Vielfaches des Divisors dem jedesmal zur Division vorliegenden Theile des Dividends am nächsten kommt, können, obgleich ihre Zahl immer beschränkt bleibt, doch beim Rechnen mit großen Zahlen beschwerlich werden. Für solche Fälle würde es am zweckmäßigsten sein, alle Vielfachen des Divisors bis zu dem der Grundzahl des Systems, welchem die Zahlen angehören, im Voraus zu berechnen und in einer Hülfstabelle zusammenzustellen. Ein Blick in diese Tabelle würde hinreichen, allemal das nächstkleinere Vielfache des Divisors herauszufinden. Statt dessen pflegt der gemeine Mechanismus die Menge der erforderlichen Versuche, um die richtige Ziffer des Quotienten zu entdecken, durch eine vorläufige Vergleichung der höchsten Ziffern im Dividend und Divisor zu beschränken.

Nachstehende Beispiele werden das Gesagte versinnlichen.

a) in dekadischen Zahlen:

Dividend.	Divisor.
1 7 7 2 4 2 | 1 3 6 8 9	: 32805 (= d)
— 1 6 4 0 2 5 (= 5d)	= $540290\frac{239}{32805}$ Quotient.
1 3 2 1 7 1	
— 1 3 1 2 2 0 (= 4 d)	
9 5 1 3 6	
— 6 5 6 1 0 (= 2d)	
2 9 5 2 6 8	
— 2 9 5 2 4 5 (= 9 d)	
2 3 9	

b) in Zahlen, welche nach der Grundzahl 5 gebildet sind:

Dividend.	Divisor.
1 3 4 0 2 2 | 1 2 0 3	: 2 3 0 2 4 (= d)
— 1 2 4 1 3 2 (= 3d)	= 3 1 4 0 2 Quotient.
4 3 4 0 1	
— 2 3 0 2 4 (= 1d)	
2 0 3 2 2 2	
— 2 0 2 2 1 1 (= 4d)	
1 0 1 1 0 3	
— 1 0 1 1 0 3 (= 2d)	
0	

Beispiele besonders in Zahlen aus einem anderen als dem dekadischen Systeme.

Um mit einer Einheit höherer Ordnung eine vielziffrige Zahl desselben Systems zu dividiren, braucht man nur den Theil dieser Zahl, welcher bis zu dem Range jener Einheit herabgeht, in unveränderter Ordnung der Ziffern als die Ganzen des Quotienten abzusondern und den übrigbleibenden Theil zum Zähler, die Einheit, durch welche dividirt wird, zum Nenner eines Bruchs zu machen, welcher dem ersten Theile des Quotienten anzuhängen ist; z. B. $4371624 : 1000 = 4371\frac{624}{1000}$.

Begründung dieser Regel.

Wie lässt sich hiernach schon vorläufig eine Divisionsaufgabe vereinfachen, wenn Dividend und Divisor beide Nullen am Ende haben?

2. Soll ein Quotient aus vielziffrigen Zahlen bloß näherungsweise bis zu der Ziffer einer bestimmten Ordnung herab berechnet werden, so behält man vom Dividend nur den höchsten Theil bis zu der Ziffer desjenigen Ranges, in welchem sich die Entwickelung des Quotienten schließen soll, und bricht die Rechnung beim Ende dieses Theils ab. So ist z. B. der Quotient aus

```
45438307|291036 | : 34708
34708           |---------------
------          | bis auf Millionen berechnet
 107303         | = 1309
 104124
 ------
   317907
   312372
   ------
     5535
```

Der vorliegende Theil des Dividends reicht aber hin, um auch noch mehre Ziffern des Quotienten von niedrigerem Range zu bestimmen. Diese Bemerkung erlangt besonderen Werth in solchen Fällen, wenn man entweder bei Divisionen mit großen Zahlen, wo es nur um die Kenntniß der höchsten Ziffern des Quotienten, bis zu einem gewissen Range herab, zu thun ist, die Rechnung möglichst abkürzen will, oder wenn der Dividend nur als unvollständige Zahl, in einer gewissen Stelle abgebrochen, gegeben ist, und der Quotient doch so weit, d. h. auf so niedrige Stellen, als möglich, berechnet werden soll.

Man weiß nämlich schon aus dem bisher gelehrten Divisionsverfahren — und könnte es leicht aus den entsprechenden Multiplicationsregeln herleiten —, daß vorzugsweise die höchsten Ziffern jedes partiellen Dividends und des Divisors über die Größe jedes einzelnen Theils des Quotienten entscheiden. Wird dieser bei einem vorläufigen Versuche möglichst groß genommen, so bewährt er sich als richtig, wenn das Product aus ihm in den Divisor von oben an gerechnet an einer früheren Stelle eine kleinere Ziffer enthält, als die gleich hohe des partiellen Dividends, von welcher sie abzuziehen ist. Sobald man daher genöthigt wäre, zur Auffindung niedrigerer Ziffern des Quotienten von späteren Stellen des Dividends Gebrauch zu machen, als man vorfindet oder in Rechnung zu nehmen beabsichtigt, so bestimmt man zuerst nach den höchsten Ziffern des Dividends und Divisors den folgenden Theil des Quotienten, und bricht das Partialproduct aus diesem und dem Divisor bei den Einheiten derselben Ordnung ab, mit welchen der Dividend aufhört. Man erreicht diese Abkürzung am leichtesten, indem man bei jeder folgenden Division vom Divisor eine Ziffer mehr vom Ende wegläßt. Bei der Berechnung der abgekürzten Partialproducte müssen aber die weggelassenen Ziffern den §. 19. 6, a, getroffenen Bestimmungen gemäß, berücksichtigt werden. Daß übrigens diese verkürzten Partialproducte, behufs der Subtraction, mit ihren Endziffern stets gerade unter die letzte Ziffer des partiellen Dividends zu setzen sind, bedarf kaum der Erinnerung.

Nach diesen Vorschriften so weit als möglich fortgesetzt, nimmt die Rechnung im vorigen Beispiele, wenn nur die Millionen des Dividends zur Bestimmung des Quotienten gebraucht werden sollen, folgende Gestalt an:

```
4 5 4 3 8 3 0 7 * * * * * *  :  3[4[7[0[8
3 4 7 0 8                    =  1 3 0 9|1 5 9 5 * *
---------                           Millionen
1 0 7 3 0 3
1 0 4 1 2 4
-----------
  3 1 7 9 0 7
  3 1 2 3 7 2
  -----------
      5 5 3 5
      3 4 7 0
      -------
      2 0 6 5
      1 7 3 5
      -------
        3 3 0
        3 1 2
        -----
          1 8
          1 7
          ---
            1
```

Eine geringe Ueberlegung lehrt — was auch aus dem vorstehenden Beispiele zu entnehmen ist —, daß durch dieses Verfahren der sogenannten **verkürzten Division** noch so viele spätere Ziffern des Quotienten nach derjenigen, welche den Rang der niedrigsten Ziffer des abgebrochenen Dividends hat, berechnet werden können, als die um eins verminderte Ziffernmenge des Divisors anzeigt. —

Streng genommen würde diese Bestimmung nur dann richtig sein, wenn auch der abgebrochene Dividend noch eine größere Zahl darstellt, als der Divisor ist. Sie bleibt aber auch im entgegengesetzten Falle noch zulässig, wo schon zur Auffindung der höchsten Ziffer des Quotienten eine Verkürzung des Divisors oder des aus ihm und jener Ziffer gebildeten Partialproductes stattfinden muß, wofern man auch die ausfallenden höheren Stellen des Quotienten vom Range der niedrigsten Ziffer des Dividends an (die man sich auch mit Nullen besetzt denken könnte) mitzählt.

Beispiele in beiden Voraussetzungen.

Der so berechnete Quotient kann zu groß sein. Um den Grad seiner Genauigkeit zu beurtheilen, kann man den zur letzten Division sich einstellenden Theil des Dividends um so viele Einheiten seiner niedrigsten Ordnung vermindern, als bisher verkürzte Producte von demselben abgezogen sind. Den so verminderten partiellen Dividend statt des vorigen in Rechnung nehmend, wird man die letzte Ziffer des Quotienten so klein finden, daß dieselbe auch bei vollständiger Berechnung nicht kleiner hätte werden können.

(Vergl. §. 19. 6, b.)

Hiernach würde man im vorigen Beispiele als letzten Dividend **15** statt **18** nehmen müssen, und als letzte Ziffer des Quotienten **4** statt **5** erhalten haben, so daß dieselbe auch bei vollständiger Berechnung nicht kleiner hätte ausfallen können.

Entsprechende Bestimmungen sind den selbstgewählten Beispielen hinzuzufügen.

3. Anhang. **Kennzeichen der Theilbarkeit künstlich gebildeter Zahlen durch andere.**

Für manche Rechnungen ist es nicht ohne Interesse, Merkmale zu haben, an denen man im Voraus erkennen kann, ob eine künstlich zusammengesetzte Zahl durch eine andere ohne Rest dividirt werden kann. Am leichtesten würde sich dieses beurtheilen lassen, wenn der Divisor die Grundzahl des Systems oder ein Product aus lauter solchen Grundzahlen, also eine höhere Einheit dieses Systems wäre. Der Dividend würde durch eine solche nur dann theilbar sein, wenn er am Ende mit wenigstens eben so vielen Nullen geschrieben würde, als diese Einheit selbst.

Für jeden anderen Divisor d ist die Frage, ob eine zusammengesetzte Zahl N durch ihn theilbar sei, nicht so einfach zu beantworten. Bezeichnet man mit Z, Z', Z'', Z''' rc. die einzelnen Ziffern, mit welchen die Zahl N von unten auf geschrieben wird, so lässt sich diese unter der allgemeinen Form $N = Z + 10Z' + 100Z'' + 1000Z''' +$ rc. darstellen. Da nun die Ziffern Z, Z' rc. jede beliebige Einermenge bedeuten können, die Einheiten verschiedener Ordnung aber in allen Zahlen desselben Systems eine feststehende Geltung haben, so kann man sich mit der Division durch d zunächst an diese wenden. Wären sie alle durch d theilbar, so würde die Theilbarkeit der ganzen Zahl N nur von der Endziffer Z abhängen. Im Allgemeinen aber wird diese Division mit d in die verschiedenen Einheiten höherer Ordnung nicht aufgehn. Alsdann wird jede derselben durch die Division zerlegt in ein Vielfaches des Divisors, m d, und einen Rest, r, kleiner als dieser, — unter den Werthen von m und r auch o mit eingeschlossen. Die ganze Zahl N erhielte durch eine solche Zerlegung die Form

$$\begin{array}{llll} N = & Z & = & Z \\ & +(m'd + r')Z' & & + m'Z'd + r'Z' \\ & +(m''d + r'')Z'' & & + m''Z''d + r''Z'' \\ & +(m'''d + r''')Z''' & & + m'''Z'''d + r'''Z''' \\ & \quad + \text{ꝛc.} & & \quad + \text{ꝛc.} \end{array}$$

Die in erster Reihe stehenden Theile der Zahl, $m'Z'd$ ꝛc., sind nun von selbst durch d theilbar, weil sie d als Factor enthalten. Ob also die Division in die ganze Zahl N aufgeht, hängt davon ab, ob die Summe der in die zweite Reihe gesetzten Theile

$$(Z + r'Z' + r''Z'' + r'''Z''' + \text{ꝛc.})$$

d. h. die Summe der Einer und der Producte aus den einzelnen Resten, welche bei der Division jeder Einheit höherer Ordnung mit dem Divisor d übrig bleiben, in die Ziffern ihres Ranges (Z', Z'' ꝛc.) durch d theilbar ist.

Aus diesen allgemeinen Bestimmungen fließen für dekadisch gebildete Zahlen leicht folgende besondere her.

Eine (dekadisch zusammengesetzte) Zahl ist

durch 2 theilbar, oder eine paare Zahl, wenn ihre Einer es sind, oder wenn diese ganz fehlen, ($Z = 0$, oder 2, 4, 6, 8);

durch 4, wenn die doppelte Menge der Zehner mit den Einern zusammengenommen ($2Z' + Z$) — oder wenn ihr letzter Theil nach den Hundertern durch 4 theilbar ist;

durch 8, wenn die 4fache Menge der Hunderter mit der doppelten Menge der Zehner und den Einern zusammengenommen ($4Z'' + 2Z' + Z$) — oder wenn ihr letzter Theil nach den Tausendern durch 8 theilbar ist;

durch 3 oder 9, wenn diese Zahlen in die Quersumme ihrer Ziffern ($Z + Z' + Z'' + Z''' +$ ꝛc.) aufgehn;

durch 5, wenn sie auf 5 oder 0 endigt, ($Z = 5$ oder 0);

durch 7, wenn die Ziffern der Zahl von unten auf mit der stets wiederkehrenden Reihe der Reste 1, 3, 2, 6, 4, 5 multiplicirt eine durch 7 theilbare Summe geben ($Z + 3Z' + 2Z'' + 6Z''' + 4Z^{IV} + 5Z^{V} + Z^{VI} +$ ꝛc.)*);

*) Dieses Merkmal der Theilbarkeit einer Zahl durch 7 erfordert so viele Rechnungen, daß es wenigstens eben so bequem ist, die Division durch 7 selbst auszuführen.

durch 6, wenn sie durch 2 und 3, durch 12, wenn sie durch 4 und 3, durch 15, wenn sie durch 5 und 3 theilbar ist, u. s. f.

durch 11, wenn die Summe der von den Einern aufwärts aus je zwei Ziffern zusammengesetzten Theile, zu welchen bei einer unpaaren Ziffernmenge die höchste als einfacher Theil hinzukommt, durch 11 theilbar ist, — oder wenn die Summen aller Ziffern aus den unpaaren Stellen für sich einander gleich, oder um ein Vielfaches von 11 verschieden sind, — u. dergl. m.

Herleitung dieser Regeln und Bestätigung derselben an Beispielen. — Die Neunerprobe bei der Addition.

§. 21.

Uebertragung von Zahlen aus einem Systeme in ein anderes.

Alle bisherigen Vorschriften für das Rechnen mit künstlich gebildeten Zahlen beruhen auf der Voraussetzung, daß die Zahlen, mit denen man rechnet, dem nämlichen Systeme angehören. In der That lässt sich ohne diese Voraussetzung ein bequemer und einfacher Rechnungsmechanismus gar nicht denken. Wenn nun gleich im ernstlichen Gebrauche keine andere als dekadisch gebildete Zahlen vorkommen, so wurden doch, den Forderungen der Wissenschaft gemäß, jene Vorschriften so allgemein entwickelt, daß sie auch auf Zahlen jedes anderen Systems passen. Das Rechnen mit solchen Zahlen, welche nach einer anderen Grundzahl als zehn gebildet sind, ist schon um deßwillen nicht unwichtig, weil es die Einsicht in die Gesetze der künstlichen Zahlen=Bildung und Verknüpfung erweitert und befördert und von einem gedankenlosen Rechnen entwöhnt.

Hat man nun mit Zahlen aus verschiedenen Systemen gerechnet, so entsteht, sobald man diese unter einander vergleichen will, die Aufgabe, eine Zahl ohne Aenderung ihres Werthes aus einem Systeme in ein anderes zu übertragen. Zur Lösung dieser Aufgabe bieten sich mehre Methoden an.

1. Den Gesetzen der künstlichen Zahlenbildung zufolge würde man vorerst nur nöthig haben, die Einer, die Grundzahl und die Einheiten höherer Ordnung des einen Systems durch entsprechende Zahlformen des anderen darstellen zu können. Denn gesetzt, diese

Zahlen des einen Systems wären mit den gleichgeltenden Zahlen des zweiten in eine Tabelle zusammengestellt, so würde die Uebertragung einer bestimmten Zahl des ersten Systems in das zweite nichts weiter erfordern, als daß man für jede einzelne Ziffer und die Einheit ihres Ranges die entsprechenden Ausdrücke nach der zweiten Grundzahl aufsuchte, letztere beide nach den Regeln ihres Systems mit einander multiplicirte, und die Producte addirte. — Wie man sich aber eine solche Tabelle, als hier gefordert wird, anfertigen könne, bedarf keiner ausführlichen Anweisung.

Die Uebertragung der Einerzahlen des ersten Systems in das zweite kommt auf die ursprüngliche Zahlenbildung zurück. Ist die Grundzahl des ersten Systems kleiner als die des zweiten, so behalten alle Zahlen bis zu ihr hinauf auch in dem letzteren Systeme dieselbe Bezeichnung: ist sie größer, so zählt man von der Grundzahl des zweiten Systems, als der Einheit erster Ordnung, neben dieser die Reihe der Einer von Neuem. Würde zur Grundzahl des einen Systems eine größere Zahl als zehn gewählt, so müßten für seine Einerzahlen von zehn an neue, einfache Ziffern eingeführt werden. Angelangt bei der Grundzahl des ersten Systems oder seiner Einheit erster Ordnung, erhält man die entsprechenden Werthe seiner Einheiten noch höherer Ordnung der Reihe nach im zweiten System, wenn man den Werth jener Grundzahl in diesem System zuerst mit sich selbst, alsdann dieses Product, und so jedes folgende wiederum mit demselben Factor multiplicirt. So erhält man z. B. für die

Zahlen der Grundzahl fünf	1, 2, 3, 4, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 2c.
d. entsprechenden dekadisch gebildeten	1, 2, 3, 4, 5, 25, 125, 625, 3125, 15625 2c.

und hiernach würde die pentadische Zahl **340213** (V) durch folgende Rechnung in eine dekadische verwandelt werden:

	V	X	
340213	= 3	= 3	= 3
	+ 10	+ 1 . 5	+ 5
	+ 200	+ 2 . 25	+ 50
	+ 40000	+ 4 . 625	+ 2500
	+ 300000	+ 3 . 3125	+ 9375

also: 340213 (V) = 11933 (X)

2. Statt dieses Verfahrens läſſt ſich auch ein anderes anwenden, welches, auf denſelben Grundſätzen beruhend, nur ſtufenweiſe anſtatt theilweiſe die eine Zahl aus der andern entwickelt. Man rechnet nämlich nach den Regeln des zweiten Syſtems, in welches die Zahl übertragen werden ſoll, ſo, als wollte man alle ihre höheren Einheiten in urſprüngliche auflöſen, d. h. man multiplicirt zuerſt den höchſten Theil der Zahl mit der Grundzahl ihres Syſtems, in der Geſtalt, die ihr nach dem zweiten Syſteme zukommt; das Product, gleichfalls nach den Regeln dieſes Syſtems geſchrieben, zählt folglich Einheiten der nächſt niedrigeren Ordnung; man zieht die in der gegebenen Zahl vorhandenen Einheiten eben dieſer Ordnung hinzu, multiplicirt aufs Neue mit jener Grundzahl wie vorhin, addirt zu dem erhaltenen Producte, als einer Menge von Einheiten der nächſt niedrigeren Ordnung, wiederum die vorhandenen Einheiten gleichen Ranges, und ſetzt die Rechnung auf gleiche Weiſe bis zu den Einern der gegebenen Zahl fort. Für das vorige Beiſpiel nimmt dieſe Rechnung folgende Geſtalt an:

```
    3|4 0 2 1 3 (V)
 ×  5|+ . . . .
 ---------
    1 9 . . . .
    × 5 . . . .
 ---------
      9 5 . . .
      × 5 + . .
 -----------
      4 7 7 . .
        × 5 + .
 -----------
    2 3 8 6 .
        × 5 +
 -----------
 = 1 1 9 3 3 (X)
```

3. Auf einer etwas verschiedenen Vorstellung beruht folgendes Verfahren. Man berechnet sich zuerst auf die Art, welche vorhin (1) angezeigt wurde, eine Tabelle, in welcher die Einerzahlen und die höheren Einheiten des zweiten Systems, in welches die gegebene Zahl übersetzt werden soll, mit den gleichgeltenden Zahlen des ersten Systems, dem die Zahl selbst angehört, zusammengestellt sind. Alsdann dividirt man mit der größten Zahl der zweiten Reihe, welche in der gegebenen vorkommt, in diese nach den Gesetzen ihres Systems; der Quotient, bloß auf ganze Einheiten beschränkt, giebt die Menge von Einheiten der höchsten Ordnung an, welche die gegebene Zahl nach dem zweiten Systeme enthält. Den bei der Division gebliebenen Rest dividirt man aufs Neue mit der Zahl, welche den Werth einer nächst niedrigeren Einheit dieses Systems ausdrückt u. s. f. bis der letzte Rest nur noch Einer enthält. Die Quotienten, mit den Ziffern des zweiten Systems bezeichnet, der Reihe nach — auch 0 nicht ausgeschlossen — in absteigender Ordnung mit den zuletzt übrigbleibenden Einern zusammengestellt, geben die Zahl im zweiten Systeme wieder.

Die Tabelle für die Berechnung des vorigen Beispiels würde demnach folgende:

dekadische Zahlen	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	100,	1000,	10000 ꝛc.
d. entspr. pentad.	1,	2,	3,	4,	10,	11,	12,	13,	14,	20,	400,	13000,	310000 ꝛc.

und die Berechnung selbst:

Divisoren		Quotienten
310000	340213 310000	1
13000	30213 13000	1
400	12213 400 3213 3100	14 (V) = 9 (X)
20	113 110	3
	3	

mithin 340213 (V) = 11933 (X)

4. Man kann endlich auch dieses Verfahren wieder mit einem anderen vertauschen, welches im Wesentlichen von derselben Vorstellung ausgeht, aber anstatt nach und nach aus der gegebenen die Theile der zweiten Zahl vom höchsten an herauszuheben, diese vielmehr in umgekehrter Ordnung durch allmählige Entwickelung stets höherer Einheiten aus niedrigeren findet. Zu dem Ende bestimmt man nur die Grundzahl des zweiten Systems durch eine Zahl des ersten, dividirt mit dieser in die gegebene Zahl nach den Regeln ihres Systems und sondert den etwa übrig bleibenden Rest ab. Dieser zählt im zweiten Systeme nur ursprüngliche, der Quotient dagegen Einheiten erster Ordnung. Man unterwirft daher diesen und ebenso jeden folgenden Quotienten, so lange es angeht, wieder derselben Division mit dem vorigen Divisor und merkt sich die Reste, auch 0 nicht ausgeschlossen. Diese enthalten also in stufenweisem Fortschritt die höheren Einheiten des zweiten Systems, welche in der gegebenen Zahl vorkommen. Man schreibt daher sämmtliche Reste mit den Ziffern dieses Systems und stellt sie in der Ordnung, wie sie erfolgen, von dem niedrigsten aufsteigend, zusammen.

Hiernach läſst sich die Berechnung des vorigen Beispiels, wofür der stehende Divisor 10 (X) = 20 (V) ist, so anordnen:

Divisoren		Reste
20	340213 (V)	3
20	14233	3
20	434	14(V) = 9(X)
20	21	1
	1	1

also $\qquad$ 340213 (V) = 11933 (X).

Die Rechnung ist für das vorstehende Beispiel nach allen vier Methoden auch umzukehren, so daß aus der abgeleiteten Zahl rückwärts die gegebene wieder hergestellt wird. Für ein anderes Beispiel ist die Rechnung ebenfalls in diesem doppelten Sinne auszuführen, und sonst noch ein und das andere mit anderen Grundzahlen als fünf und zehn nach der am bequemsten gehaltenen Methode zu berechnen.

Zum Beschluß ist für jede der vier einfachen Rechnungsarten ein Beispiel mit denselben Zahlen, aber in verschiedenen Systemen ausgedrückt, zu berechnen, und das Resultat, um seine Richtigkeit zu prüfen, aus dem einen Systeme in das andere zu übersetzen.

Vierter Abschnitt.

Die vier einfachen Rechnungsarten mit gebrochenen Zahlen.

---

§. 22.

Grösse, Form und Formverwandlung gebrochener Zahlen.

1. Die Eintheilung aller Zahlen in ganze und gebrochene ist im Begriffe der Zahl selbst begründet. Es ist daher bereits im Eingange der Arithmetik (§. 2) der Begriff des Bruchs, die Art seiner Benennung und Bezeichnung durch Nenner und Zähler, und deren Bedeutung erklärt. Indem nun unsere Absicht dahin geht, Regeln für das Rechnen mit gebrochenen Zahlen zu entwickeln, kommen wir noch einmal auf jene Grundbegriffe zurück, um ihnen einige Erläuterungen und nähere Bestimmungen hinzuzufügen.

Wiederholung und Eintheilung sind die Elemente der Zahlenbildung. Jene erzeugt den Begriff des Vielfachen, diese den des aliquoten Theils. Beide Begriffe bestimmen das Verhältniß einer Größe zu einer anderen gleicher Art, jedoch mit dem Unterschiede, daß der eine die Größe als ursprünglich gegeben annimmt, welche der andere mittelbar, eben durch ihr Verhältniß zu der zweiten, bestimmen will, und umgekehrt diejenige mittelbar darstellt, welche der andere als gegeben annimmt. Beide Begriffe beziehen sich also wechselsweise auf einander; durch Umkehrung der Beziehungen führt jeder auf den anderen. Im Grunde ist es daher dieselbe Vorstellung, auf welcher beide beruhen, nämlich die Vorstellung einer Vielheit von Einzeldingen.

Die Zahl nennt ohne Unterschied das ursprünglich Gegebene Einheit; diese bildet den festen Anfangspunkt der Vergleichung, und dadurch wird es unvermeidlich, Vielfache und aliquote Theile als besondere Vorstellungsarten eines und desselben, aber in entgegengesetzten Richtungen aufgefassten Verhältnisses zu unterscheiden. Vielfache der Einheit werden durch ganze, aliquote Theile derselben und deren Vielfache durch gebrochene Zahlen ausgedrückt.

Aber schon in der Bezeichnung gebrochener Zahlen durch ganze offenbart sich wieder die Einerleiheit der Grundidee, aus welcher alle Zahlen entspringen. Man bezeichnet irgend einen aliquoten Theil der Einheit dadurch, daß man die Menge oder Vielheit der zu beschreibenden gleichen Theile angiebt, welche zusammen ein Ganzes ausmachen, also eigentlich die Einheit als ein Vielfaches solcher Theile darstellt. Dazu dient eine ganze Zahl; bekanntlich ist sie der Nenner des Bruchs. Zähler und Nenner eines Bruchs zählen also denselben Theil der Einheit, nur in verschiedener Absicht: dieser, um zu bestimmen, wie viele solcher Theile zusammen die Einheit ausmachen, jener, um anzuzeigen, wie viele derselben in der darzustellenden Größe enthalten sind.

2. Die Größe eines Bruchs oder dessen, was er bezeichnet, hängt demnach von beiden ganzen Zahlen, die er in sich vereinigt, dem Zähler und Nenner ab, und zwar in entgegengesetzter Art. Bei unverändertem Nenner bewirkt Vergrößerung des Zählers oder der Menge vorhandener Theile in gleichem Maße Vergrößerung des Bruchs selbst, und mit wachsendem Zähler kann der Bruch selbst ins Unendliche zunehmen. Umgekehrt hat Vergrößerung des Nenners, ohne Aenderung des Zählers, in eben dem Maße Verkleinerung des Bruchs zur Folge; denn je größer die Menge gleicher Theile ist, aus denen sich ein Ganzes zusammensetzt, desto kleiner muß natürlich der einzelne Theil sein. Mit stetiger Vergrößerung des Nenners lässt sich daher der Werth eines Bruchs bis zu jeder beliebigen Kleinheit herabbringen und über jede Grenze hinaus oder ins Unendliche verringern.

3. Während also die ganze Zahl nur einer unbegrenzten Vergrößerung fähig ist, kann der Bruch eben so wohl auch ins Unendliche verkleinert werden. Die Form des Bruchs ist also geeignet, beide Arten von Verhältnissen auszudrücken, sowohl diejenigen, welche etwas Größeres, als auch solche, welche etwas Kleineres als die Einheit bestimmen. Auch ganze Zahlen lassen sich in Form von

Brüchen, mit dem Nenner 1 $\left(4 = \frac{4}{1};\ n = \frac{n}{1}\right)$ darstellen. Die Bruchform kann daher als die allgemeine Form aller Zahlen gelten, und da die Verschiedenheit derselben in dieser Hinsicht bloß von der Beschaffenheit des Nenners abhängt, so bestimmt man überhaupt die Form einer Zahl durch die Angabe, welchen Nenner, 1 nicht ausgeschlossen, sie führt.

4. Ganze Zahlen können aber überhaupt ohne Aenderung ihres Werthes in Form von Brüchen mit beliebigem Nenner dargestellt werden. Denn was sich durch die ganze Einheit vollständig ausmessen lässt, muß auch durch jeden aliquoten Theil derselben ohne Rückstand zusammengesetzt werden können. Jede Einheit enthält den aliquoten Theil, welchen der Nenner beschreibt, so oft, als dieser anzeigt, $\left(1 = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} \text{ rc.} = \frac{n}{n},\right)$ eine ganze Zahl also dieselbe Menge so viel mal, als sie Einheiten zählt.

Um daher eine ganze Zahl (a) in einen Bruch von vorgeschriebenem Nenner (n) zu verwandeln, multiplicirt man sie mit diesem (an) und setzt dem Producte den Nenner als solchen wieder unter;

$$a = \frac{an}{n}. \qquad \text{B.}$$

5. Aber nicht bloß ganze Zahlen, sondern auch Brüche gestatten unzählige Veränderungen ihrer Form. Jeder aliquote Theil der Einheit kann selbst wieder in jede beliebige Menge gleicher Theile zerlegt werden, und was sich durch Wiederholung aus dem ersten erzeugen lässt, muß auch als ein Vielfaches von Theilen der zweiten Art dargestellt werden können. Solcher Theile der zweiten Art müssen so viele auf die Einheit gehen, als das Product der beiden Zahlen angiebt, welche bestimmen, erstens, in wie viele gleiche Theile anfänglich die Einheit, und zweitens, in wie viele nachher jeder der erhaltenen Theile selbst wieder zerlegt sein soll. Jedes andere Vielfache des zuerst genannten Theils enthält den neuen Theil so viel mal mehr, als jener erste Theile der neuen Art in sich begreift.

Hiernach ist klar, daß Zähler und Nenner eines Bruchs gleichzeitig mit jeder beliebigen ganzen Zahl multiplicirt werden dürfen, ohne daß der Werth des Bruchs sich ändert.

So ist z. B. $\frac{2}{5} = \frac{2 \,.\, 3}{5 \,.\, 3} = \frac{6}{15} = \frac{2 \,.\, 4}{5 \,.\, 4} = \frac{8}{20}$ rc.

allgemein $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$.

B. — Welche Rechnung wäre anzustellen, wenn der Nenner, welchen ein gegebener Bruch erhalten soll, vorgeschrieben wäre?

Umgekehrt ändert sich also auch der Werth eines Bruchs nicht, wenn man Zähler und Nenner desselben zugleich durch die nämliche ganze Zahl dividirt — vorausgesetzt, daß die Division beide mal aufgeht;

$$\frac{8}{20} = \frac{8:2}{20:2} = \frac{4}{10} = \frac{8:4}{20:4} = \frac{2}{5};$$

allgemein $\frac{an}{bn} = \frac{an:n}{bn:n} = \frac{a}{b}$.

B. — Was für Nenner lassen sich also überhaupt für die Form annehmen, in welche ein gegebener Bruch verwandelt werden soll?

§. 23.

Kürzeste Form eines Bruchs; — Brüche auf gleiche Benennung zu bringen; — kleinster Generalnenner.

1. Die beiden vorhergehenden Sätze bieten Mittel dar, einen Bruch nach Willkür oder für gewisse Rechnungszwecke auf die mannigfaltigste Art umzuformen. Division des Zählers und Nenners durch einen gemeinschaftlichen Factor kürzt den Bruch ab, Multiplication beider Zahlen mit derselben dritten erweitert die Gestalt desselben.

Ein Bruch wird durch die möglich kleinsten Zahlen oder in kürzester Form ausgedrückt, wenn Zähler und Nenner desselben keinen gemeinschaftlichen Factor mehr enthalten, oder Primzahlen gegen einander sind (S. §. 15. 1); so z. B. $\frac{4}{5}$, $\frac{14}{45}$ u. a.

Soll ein Bruch auf seine kürzeste Form gebracht werden, so suche man (nach §. 15. 3) das größte gemeinschaftliche Maß seines Zählers und Nenners und dividire beide durch dasselbe.

B. $\frac{10am + 4bm}{14mr - 2m} = ?$ $\frac{8af + 12al}{15lr + 10fr} = ?$

Welchen Ausweis giebt die Rechnung, wenn der Bruch keiner Abkürzung mehr fähig ist?

2. Weniger beschränkt und zugleich wichtiger für das Rechnen mit Brüchen ist die Möglichkeit einer Erweiterung ihrer Gestalt. Sollen Brüche mit einander vereinigt oder verglichen werden, so wird vor allen Dingen verlangt, daß sie gleichartig sind, d. h. gleiche oder gleichvielte Theile der Einheit zählen. Man muß also im Stande sein, Brüche von beliebig verschiedenen Nennern so umzuformen, daß sie denselben Nenner bekommen, oder Brüche auf gleiche Benennung zu bringen.

Für zwei Brüche ist das Verfahren leicht gefunden. Ein Bruch kann jeden Nenner bekommen, der ein beliebiges Vielfaches des gegebenen ist. Der gemeinschaftliche oder Generalnenner zweier Brüche muß daher ein Vielfaches so gut des einen wie des anderen Nenners sein, am einfachsten also ein Product aus beiden. Der Zähler eines Bruchs ist mit derselben Zahl zu multipliciren, wie sein Nenner; daher die Regel: um zwei Brüche auf gleiche Benennung zu bringen, multiplicire man Zähler und Nenner des einen Bruchs mit dem Nenner des anderen.

So verwandeln sich $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$

in $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{bc}{bd}$.

B.

Kommt zu zwei Brüchen noch ein dritter hinzu, so kann man erst wieder deren zwei, und nach derselben Vorschrift jeden dieser gleichnamigen Brüche mit dem dritten auf gleiche Benennung bringen. Dasselbe Verfahren läßt sich nach und nach auf vier, fünf und jede größere Anzahl von Brüchen ausdehnen.

Auf diesem Wege erhielte man z. B. aus

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{e}{f}, \quad \frac{g}{h}$$

zuerst $\frac{ad}{bd}, \quad \frac{bc}{bd}, \quad \frac{e}{f}, \quad \frac{g}{h},$

dann $\frac{adf}{bdf}, \quad \frac{bcf}{bdf}, \quad \frac{bde}{bdf}, \quad \frac{g}{h}$

und zuletzt $\frac{adfh}{bdfh}, \quad \frac{bcfh}{bdfh}, \quad \frac{bdeh}{bdfh}, \quad \frac{bdfg}{bdfh}.$

Der einfache Gang dieser Rechnung, auch wenn noch mehr Brüche von verschiedenen Nennern auf gleiche Benennung gebracht werden sollen, ist jedoch leicht genug zu übersehen, um in größter Allgemeinheit das Resultat vorausbestimmen zu können, auch ohne daß man die Entwickelung durch alle Zwischenstufen hindurchzuführen genöthigt ist.

Um mehre Brüche von verschiedenen Nennern auf gleiche Benennung zu bringen, multiplicire man Zähler und Nenner jedes einzelnen Bruchs mit dem Producte aus den Nennern aller übrigen Brüche. — Das Product aller verschiedenen Nenner wird der gemeinschaftliche.

Nach dieser Regel würden die obigen Brüche

$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{e}{f}, \quad \frac{g}{h}$ unmittelbar in

folgende verwandelt: $\frac{(a)dfh}{(b)dfh}, \quad \frac{a(c)fh}{b(d)fh}, \quad \frac{bd(e)h}{bd(f)h}, \quad \frac{bdf(g)}{bdf(h)}.$

Zahlenbeispiel; die gegebenen Brüche sind sowohl stufenweise als auch nach der letzten Regel gleichnamig zu machen.

Warum hat die Regel nur auf Brüche von verschiedenen Nennern, und nicht auch auf den Fall Rücksicht genommen, wenn unter den gegebenen Brüchen selbst schon gleichnamige vorkommen?

3. Ist das Product aller Nenner, der Generalnenner, einmal berechnet, so kann man den Factor, mit welchem der Zähler jedes einzelnen Bruchs zu multipliciren ist, d. i. das Product aus den Nennern aller übrigen Brüche, eben so gut auch dadurch finden, daß man mit dem eigenen Nenner des Bruchs in den Generalnenner dividirt.

Man sieht daraus, daß zum gemeinschaftlichen Nenner mehrer gegebener Brüche jede Zahl angenommen werden darf, welche durch jeden der vorhandenen Nenner ohne Rest dividirt werden kann. Eine solche Zahl braucht nicht immer nothwendig ein Product aller dieser Nenner zu sein; in vielen Fällen genügt vielmehr eine weit einfachere Zahl.

Daß man einen Nenner, welcher mehren der gegebenen Brüche angehört, nur einmal in das Product aufzunehmen braucht, welches der Generalnenner werden soll, ist von selbst klar. Man darf aber auch jeden Nenner, welcher in einem anderen oder in dem Producte der übrigen als Factor vorkommt, und nicht minder einzelne Factoren eines Nenners, welche schon in den übrigen enthalten sind, von der Berechnung des Generalnenners ausschließen.

Man ist also nur dann gezwungen, das Product aller gegebenen Nenner zum gemeinschaftlichen anzunehmen, wenn diese absolute oder Primzahlen gegen einander sind.

Weßhalb? — Vergl. §. 14.

In jedem anderen Falle lässt sich ein kleinerer Generalnenner finden. Um den *möglich kleinsten Generalnenner*, d. i. die kleinste Zahl, welche durch jeden der gegebenen Nenner theilbar ist, (den *kleinsten gemeinschaftlichen Dividend gegebener Zahlen*) zu finden, löst man nach Ausschluß solcher Nenner, welche schon in anderen als Factoren enthalten sind, die übrigbleibenden in ihre Primfactoren auf, nimmt von diesen alle von einander verschiedenen, und zwar jeden so viel mal (weder öfter noch weniger oft), als er in demjenigen Nenner vorkommt, wo er sich am häufigsten wiederholt, und vereinigt diese sämmtlichen Factoren zu einem Producte.

Wären z. B. als Nenner von Brüchen die Zahlen

20, 15, 24, 6, 8, 30, 12, 45, 36

gegeben, so würde man zuerst von der Berechnung des Generalnenners die Zahlen **15, 6, 8** und **12** ausschließen, die übrigen

	20	24	30	45	36 in ihre
Primfactoren	2 . 2 . 5	2 . 2 . 2 . 3	2 . 3 . 5	3 . 3 . 5	2 . 2 . 3 . 3.

auflösen, und aus diesen das Product $2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 = 360$, als kleinsten gemeinschaftlichen Nenner (Dividend), zusammenstellen. Beim Rechnen mit Buchstabenausdrücken braucht man nur jeden Buchstaben wie eine Primzahl zu behandeln.

Begründung der obigen Regel aus §. 14. — Vollständige Berechnung eines Beispiels in Zahlen und Buchstaben.

§. 24.

Bestimmung der Aufgabe, welche die Regeln der Bruchrechnung zu lösen haben.

Nach den bisherigen Erörterungen über die Bedeutung, Bezeichnung und Form gebrochener Zahlen ist man nun auch im Stande, die Regeln für das Rechnen mit ihnen vollständig zu entwickeln.

Zähler und Nenner eines Bruchs sind ganze Zahlen; am Zähler oder Nenner oder an beiden zugleich und mit denselben werden alle Operationen ausgeführt werden müssen, welche die Rechnung mit Brüchen erheischt; diese kommt also stets auf ein Rechnen mit ganzen Zahlen zurück, wofür alle erforderlichen Regeln in den vorhergehenden Abschnitten niedergelegt sind. Die Regeln der Bruchrechnung haben deßhalb nur nachzuweisen, welche bestimmte Rechnungsarten an oder mit den Zählern oder Nennern derjenigen Brüche vorzunehmen sind, die in eine vorgeschriebene Verbindung eingehen sollen.

Soll aber das Resultat selbst wieder als eine Zahl von einer der beiden Formen erscheinen, welche sich überhaupt für den Begriff der Zahl als nothwendig ergeben haben, d. h. als ganze oder gebrochene Zahl; so ist die Rechnung, wenn anders es angeht, stets so einzurichten, daß solche Formen vermieden werden, in welchen als Zähler oder Nenner eines Bruchs selbst schon ein Bruch erschiene. Zu dieser Beschränkung nöthigt der aus der Division ganzer Zahlen (§. 11. 5, b) bekannte Satz, daß der Quotient aus zwei solchen Zahlen in vielen Fällen nothwendig ein Bruch werden muß.

§. 25.

Die Addition.

1. Der Begriff der Addition fordert Gleichartigkeit der zu vereinigenden Zahlen (§. 8. 1 und 4). Brüche können aber als solche

nur dann gleichartig genannt werden, wenn sie denselben Nenner haben. Um daher gegebene Brüche zu addiren, muß man dieselben (nach §. 23. 2) zuvor auf gleiche Benennung bringen, wenn sie nicht ohnehin schon denselben Nenner haben. Ganze Zahlen, welche mit Brüchen zusammenaddirt werden sollen, müssen ebenfalls erst auf die Benennung dieser Brüche gebracht werden (§. 22. 4). Dieß vorausgesetzt, bezeichnen die Zähler sämmtlicher gleichnamiger Brüche nur besondere Mengen eines und desselben Theils der Einheit. Man addirt also diese Zähler und giebt der Summe den gemeinschaftlichen Nenner wieder.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd};$$

$$\left[a + \frac{c}{d} = \frac{ad}{d} + \frac{c}{d} = \frac{ad + c}{d}.\right]$$

In wiefern sind Gleichartigkeit von Brüchen und Gleichartigkeit von Zahlen überhaupt zu unterscheiden?

Für welche besondere Voraussetzung ist die zweite, in [] eingeschlossene Formel auch in der ersten allgemeineren enthalten?

Welche besondere Regel ließe sich für das sogenannte Einrichten gemischter Zahlen aufstellen? — und welche Regel ergiebt sich auch hieraus durch Umkehrung für die Verwandlung eines unechten Bruchs in eine gemischte Zahl? (S. §. 11. 5, c.)

Zahlen- und zusammengesetztere Buchstabenbeispiele, wie etwa:

$$3a + \frac{5ab + c}{4b}; \quad 5c + \frac{3d - 4cx}{2r + x}; \quad \frac{7pp}{p - 1} + p + 1;$$

$$\frac{c}{r} + \frac{2a}{m} + \frac{2c}{3r}; \quad \frac{n}{4b + c} + \frac{16n}{4b - c} \quad \text{u. a.}$$

2. Sobald die zur Addition gegebenen Brüche (nebst den etwa vorkommenden ganzen Zahlen) auf gleiche Benennung gebracht sind, kommt die Rechnung auf die Addition der Zähler, also ganzer Zahlen zurück. Man könnte sich hierbei den Nenner, wie jeden beliebigen anderen Namen der gezählten Einheiten, völlig wegdenken und hätte es so nur mit ganzen Zahlen zu thun. Was daher von der Addition ganzer Zahlen gilt (wie u. a. der Satz über die willkürliche Anordnung der Theile §. 8. 3), läßt sich, in sofern es nicht ausdrücklich die Form der Zahl betrifft, unmittelbar auch auf gebrochene Zahlen ausdehnen.

§. 26.

Die Subtraction.

1. Auch die Subtraction, wenn der Minuend oder der Subtrahend oder beide zugleich gebrochene Zahlen sind, kann nicht eher zur Ausführung kommen, als bis beide gleichnamig sind. Man bringt also, wenn dieß nicht von selbst der Fall ist, zuerst beide gegebene Zahlen auf gleiche Benennung, **subtrahirt darauf den Zähler des Subtrahends von dem des Minuends und giebt dem Reste den gemeinschaftlichen Nenner wieder.**

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

$$\left[a - \frac{c}{d} = \frac{ad}{d} - \frac{c}{d} = \frac{ad - c}{d};\right.$$

$$\left.\frac{a}{b} - c = \frac{a}{b} - \frac{bc}{b} = \frac{a - bc}{b}.\right]$$

Für welche besondere Voraussetzungen sind die zweite und dritte Formel auch schon in der ersten allgemeineren enthalten?

Wie muß bei der dritten Aufgabe der Bruch $\frac{a}{b}$ im Verhältniß zu der ganzen Zahl c angenommen werden, wenn die Subtraction möglich sein soll?

Wie lässt sich die Rechnung vereinfachen, wenn ein echter Bruch von einer ganzen Zahl subtrahirt werden soll, und der Rest als gemischte Zahl dargestellt werden darf?

Zahlen- und Buchstabenbeispiele, ähnlich wie bei der Addition.

2. Da auch hier wieder die Rechnung, nachdem Minuend und Subtrahend gleichnamig gemacht worden sind, bloß an den Zählern vollzogen wird, während die Nenner nur zur Bezeichnung der gezählten Theile dienen; so ist ohne Weiteres klar, daß die Regeln für die Subtraction in ganzen Zahlen (§. 9. 6 bis 8), wenn dieselben eine zusammengesetzte Form haben, auch auf Brüche ihre Anwendung leiden.

Anmerk. Es ist nicht zu übersehen, daß der Bruchstrich bei zusammengesetzten Zählern oder Nennern die Einschliessungszeichen ersetzt und deßhalb überflüssig macht.

§. 27.

Multiplication gebrochener und ganzer Zahlen.

Um eine Zahl mit einer anderen zu multipliciren, soll man, dem Begriffe dieser Rechnungsart zufolge (§. 11.), die eine Zahl, den Multiplicand, an die Stelle dessen setzen, was in der anderen, dem Mulliplicator, als unbestimmte Einheit gedacht ist. Die Art und Weise, wie das Product zu bilden ist, richtet sich also nach dem Multiplicator, und die bestimmten Acte der Wiederholung oder Eintheilung, durch welche dieser aus seiner Einheit hervorgegangen ist, werden zu entsprechenden Operationen, in sofern sie an einer anderen Zahl, dem Multiplicand, ausgeführt werden sollen. Ist daher der Multiplicator ein Bruch, so verlangt dieser Eintheilung des Multiplicands in die vom Nenner bezeichnete Menge gleicher Theile und Vereinigung so vieler solcher Theile, als der Zähler angiebt. Das Erste ist Division durch den Nenner, das Zweite Multiplication mit dem Zähler des Bruchs. Wenn nun auch der Multiplicand eine gebrochene Zahl ist, so müssen beide Operationen an dieser vollzogen werden. Um daher einen Bruch mit einem andern multipliciren zu können, muß man zuvor sowohl Division als Multiplication mit einer ganzen Zahl an einem Bruche auszuführen gelernt haben.

1. Wenn aber ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, diese als Multiplicator gedacht, so hat man nur den Bruch für jede Einheit des Multiplicators oder so viel mal zu setzen, als dieser Einheiten zählt, und die erhaltene Menge gleicher Brüche in eine Summe zu vereinigen. Es wiederholt sich folglich der Zähler des Bruchs so oft, als der Multiplicator vorschreibt, und das Product beider Zahlen zählt noch dieselben Theile, welche der gegebene Nenner bezeichnet; daher die Regel: man multiplicire den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl bei unberührtem Nenner.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$$

Die Ableitung der Regel nach folgender Andeutung.

$$\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{2+2+2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7},$$

(da $3 = 1 + 1 + 1$)

ist an einem anderen Beispiele mit den nöthigen Erläuterungen zu wiederholen.

Zusammengesetztere Beispiele, wie

$$\frac{3a+m}{4} \cdot c; \qquad \frac{4r-5x}{2c+1} \cdot (2r+3x) \quad \text{und ähnliche.}$$

2. Ist die ganze Zahl, mit welcher ein Bruch multiplicirt werden soll, als Factor im Nenner enthalten (wie in der Aufgabe $\frac{5}{12} \cdot 4$), so läßt sich das nach der vorigen Regel berechnete Product $\left(\frac{5 \cdot 4}{12}\right)$ dadurch abkürzen, daß man Zähler und Nenner desselben durch jene ganze Zahl dividirt $\left(\frac{5 \cdot 4}{12} = \frac{(5 \cdot 4):4}{12\ :4} = \frac{5}{3}\right)$ In dem so gewonnenen Resultate erscheint der Zähler des Multiplicands unverändert wieder; der Nenner ist der Quotient aus dem vorigen, dividirt durch den Multiplicator. Um dieses abgekürzte Product unmittelbar zu erhalten, hat man folglich **den Nenner des Multiplicands durch die ganze Zahl**, mit welcher er multiplicirt werden soll, **zu dividiren, ohne den Zähler zu verändern.**

$$\left(\frac{5}{12} \cdot 4 = \frac{5}{12:4} = \frac{5}{3}\right).$$

Die Anwendung dieser Vorschrift muß schon nach unserer anfänglichen Voraussetzung, überhaupt aber nach den allgemeinen Forderungen, welche an die Regeln der Bruchrechnung gestellt werden (§. 24.), auf diejenigen Fälle beschränkt bleiben, wo die Division mit dem Multiplicator in den Nenner des Multiplicands aufgeht.

$$\frac{a}{bc} \cdot c = \frac{a}{bc:c} = \frac{a}{b}.$$

Es folgt hieraus, daß Verkleinerung des Nenners ohne Aenderung des Zählers in eben dem Verhältniß den Werth des Bruchs vergrößert. Man durfte dieß auch schon daraus schließen, weil umgekehrt, so viel mal der Nenner eines Bruchs größer wird, eben so viel mal sein Werth sich verringert, und so hätte sich rückwärts die obige Regel auch aus diesem Grunde rechtfertigen lassen.

Weiter auszuführen.

Die zweite Regel gewährt auch dann noch Rechnungsvortheile, in sofern man das Product in möglichst einfacher Form zu erhalten wünscht, wenn der Nenner des Multiplicands mit dem Multiplicator nur einen Factor gemein hat. Alsdann darf man nach gehöriger Zerlegung der ganzen Zahl mit diesem Factor nach der zweiten, und mit dem andern nach der ersten Vorschrift multipliciren, gleichviel in welcher Ordnung; z. B. $\frac{5}{12} . 8 = \frac{5}{12} . 4 . 2$ $= \frac{5 . 2}{12 : 4} = \frac{5}{3}$.

$$\frac{a}{42b + 14r} . 7; \quad \frac{3m}{11bc - 3b} . 4b; \quad \frac{5a - 3}{16cd + 24c} . (2d + 3);$$

$$\frac{ar + c}{16mm - 9} . (15x + 20mx)$$ und andere Beispiele.

Was erhält man zum Product, wenn man einen Bruch mit seinem Nenner multiplicirt?

3. Auch die Multiplication einer ganzen Zahl mit einem Bruche lässt sich nun in jeder Voraussetzung ausführen. Der Bruch als Multiplicator verlangt zunächst Eintheilung der ganzen Zahl in die vom Nenner bezeichnete Menge gleicher Theile oder Division durch denselben. Der verlangte Theil oder Quotient kann eine ganze Zahl werden; im Allgemeinen aber lässt er sich als Bruch darstellen, dessen Zähler die ganze Zahl, und dessen Nenner der des Multiplicators wird. In der Aufgabe $a . \frac{b}{c}$ kann derselbe allgemein durch $\frac{a}{c}$ angedeutet werden. Diesen Theil soll man nun zweitens so oft wiederholen, als der Zähler des Multiplicators (b) vorschreibt, d. h. man soll ihn mit diesem Zähler multipliciren, $\frac{a}{c} . b$, was nach der vorigen Regel (1) immer durch

Multiplication am Zähler bei unberührtem Nenner geschehen kann, $\frac{a}{c} \cdot b = \frac{ab}{c}$. Um daher eine ganze Zahl mit einem Bruche zu multipliciren, mache man das Product aus der ganzen Zahl und dem Zähler des Bruchs zum Zähler, den vorigen Nenner aber zum Nenner eines neuen Bruchs.

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

Diese Regel ist immer anwendbar. Für die Fälle, wo die Division mit dem Nenner des Bruchs in die ganze Zahl aufgeht, oder wo gleiche Factoren in diesem Nenner und dem Producte vorkommen, welches ihm zum Zähler gegeben wird, bedarf es nach dem Vorhergehenden keiner besonderen Vorschriften, um das Product sogleich in abgekürzter Form zu erhalten.

Solche Rechnungen sind an selbstgewählten Zahlenbeispielen auseinanderzusetzen.

Was für ein abgekürztes Product entsteht in dem Falle, daß die ganze Zahl dem Nenner des Bruchs, mit welchem sie multiplicirt wird, gleich ist?

Rechnungsvortheile beim Multipliciren mit gewissen ganzen Zahlen (25, 50, 125 ꝛc.), wenn man statt ihrer Brüche $\left(\frac{100}{4}, \frac{100}{2}, \frac{1000}{8} \text{ ꝛc.}\right)$ setzt.

Zusammengesetztere Buchstabenbeispiele nach Art der unter 1. und 2. angeführten.

4. Es kann nicht unbemerkt bleiben, daß die vorstehenden Regeln für die Multiplication einer ganzen und gebrochenen Zahl auf dasselbe Resultat führen, man mag den Bruch als Multiplicand oder als Multiplicator annehmen.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} \quad \text{und} \quad c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b},$$

also da $ac = ca$ ist,

$$\frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}.$$

Man darf daher Multiplicand und Multiplicator auch dann mit einander verwechseln, wenn der eine eine ganze, der andere eine gebrochene Zahl ist.

Nachdem auf die Uebereinstimmung der Producte hingewiesen worden ist, welche nach der einen oder anderen Voraussetzung aus einer ganzen und gebrochenen Zahl in dem besonderen Falle, daß jene dem Nenner des Bruchs gleich ist, schon früher berechnet wurden, kann dieses Resultat auch zur Bestätigung der §. 11. 5, c gegebenen Regel benutzt werden.

Zugleich enthalten diese Regeln eine Bestätigung des früheren Satzes (§. 12. 6), daß Multiplication und Division mit ganzen Zahlen an einer anderen in jeder beliebigen Ordnung vorgenommen werden dürfen, auch für den Fall, wenn der Quotient aus einer solchen Division ein Bruch wird.

$$\frac{a}{b} \cdot c = (a:b) \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} = (a \cdot c) : b,$$

oder $$a \cdot \frac{c}{b} = a \cdot (c:b) = \frac{a}{b} \cdot c = (a:b) \cdot c.$$

§. 28.

Division gebrochener durch ganze Zahlen.

Nach dem allgemeinen Begriffe der Division soll man durch dieselbe eine vorangegangene Multiplication mit dem Divisor wieder aufheben. Da es nun für die Bildung und Größe eines Products aus einem Bruche und einer ganzen Zahl keinen Unterschied macht, ob man diese als Multiplicand oder als Multiplicator annimmt, so muß umgekehrt auch die Division eines Bruchs durch eine ganze Zahl denselben Quotienten geben, man mag ihrer Ausführung die eine oder die andere Voraussetzung zum Grunde legen. Man kann daher ohne Rücksicht auf die zweifache Bedeutung, welcher die Division im Allgemeinen fähig ist, (vergl. §. 11. 3), die Vorschrift für die Aufgabe, einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, durch bloße Umkehrung der hierher gehörigen Multiplicationsregeln erhalten.

1. Um aber eine ganze und eine gebrochene Zahl mit einander zu multipliciren, hat man nach der allgemein zulässigen Vorschrift den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl zu multipliciren, ohne den Nenner zu verändern; $\frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$

Umgekehrt also, **um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, dividirt man mit ihr in den Zähler des Bruchs bei unberührtem Nenner;**

$$\frac{ac}{b} : c = \frac{ac:c}{b} = \frac{a}{b}.$$

Zahlen- und zusammengesetztere Buchstabenbeispiele, wie

$$\frac{am+4m}{x} : m; \quad \frac{15c-18cr}{2d+1} : (5-6r) \text{ und ähnliche.}$$

Diese Regel ist indessen nur so lange anwendbar, als die verlangte Division mit der ganzen Zahl in den Zähler des Bruchs aufgeht. (Vergl. §. 24.)

2. Für den Fall, wo diese Division nicht aufgeht, bietet sich ein Auskunftsmittel in der Annahme dar, daß der Divisor in dem Nenner des Bruchs, mit welchem er multiplicirt sein soll, als Factor vorgekommen, und durch die Multiplication aufgehoben sei (§ 27. 2). Um daher eine auf solche Art mit dem Divisor verrichtete Multiplication wieder aufzuheben, **hat man mit ihm den Nenner des Dividends zu multipliciren und das Product dem vorigen Zähler als Nenner wiederzugeben.**

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc} \left(\text{denn } \frac{a}{bc} \cdot c = \frac{a}{b}\right).$$

B. nach Art der vorigen.

Die letzte Regel ist die allgemeine, ohne alle Einschränkung anwendbare. Sie ergiebt sich ebenso durch Zurückführung der vorliegenden Aufgabe auf den doppelten Sinn der Division.

Theils ihrer Wichtigkeit wegen, theils um die Ueberzeugung von ihrer Richtigkeit noch mehr zu befestigen und die Einsicht in den Sinn der Operation überhaupt zu befördern, mag hier noch eine kurze Andeutung der mehr ursprünglichen Ableitung dieser Regel Platz finden.

Soll die Aufgabe $\frac{a}{b} : c$ als Vergleichung gedacht werden, so hat man zuvörderst die ganze Zahl mit dem Bruche gleichnamig zu machen, also $\frac{a}{b} : \frac{bc}{b}$. Alsdann darf sich die Vergleichung auf die Mengen gleicher Theile (b tel) beschränken, welche der Dividend und Divisor zählen; $\frac{a}{b} : \frac{bc}{b} = a : bc$, und die Bildung dieses Quotienten findet allgemein in der Bruchform $\frac{a}{bc}$ ihre Erledigung.

Als Eintheilung gedacht, fordert dagegen die Division den sovielten Theil des Dividends $\frac{a}{b}$, als der Divisor c vorschreibt. Der Dividend ist selbst schon aus aliquoten Theilen der Einheit zusammengesetzt; da ihre Menge a nicht immer durch die ganze Zahl c theilbar ist, so verrichtet man an jedem derselben für sich die verlangte Eintheilung, und vereinigt die erhaltenen Theile der neuen Art zum Quotienten. Da nun solcher Theile, wie der Dividend zählt, b auf die Einheit gingen, und jeder derselben wieder in c gleiche Theile zerlegt sein soll, so enthält die Einheit c mal so viele, oder bc Theile der neuen Art; $\frac{1}{b} : c = \frac{1}{bc}$. Im Dividend waren a Theile enthalten, von jedem ist der verlangte neue Theil $= \frac{1}{bc}$; also muß der Quotient wieder eben so viele (a) Theile der neuen Art enthalten; $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$, wie vorhin.

Beide Schlußfolgen sind an Zahlenbeispielen ausführlicher zu erörtern.

Wenn der Divisor in Factoren aufgelöst werden kann, von welchen der eine zugleich im Zähler des Dividends vorkommt, so lässt sich der Quotient in abgekürzter Form durch gleichzeitige Anwendung der beiden vorstehenden Regeln finden, indem man mit jenem Factor in den Zähler des Dividends dividirt und mit dem anderen den Nenner desselben multiplicirt.

Weßhalb? — B. in Zahlen und Buchstaben, ähnlich gebildet wie bei §. 27. 2.

§. 29.

Multiplication zweier Brüche.

1. Die Multiplication mit einem Bruche $\left(\frac{c}{d}\right)$ kommt nach

früheren Erörterungen (§. 27. im Anfange und 3) auf zwei Operationen, Division durch den Nenner (d) und Multiplication mit dem Zähler (c), zurück. Der Sinn dieser Aufgabe und die daraus hervorgehende Rechnung können sich nicht ändern, wenn nun auch zum Multiplicand eine gebrochene Zahl $\left(\frac{a}{b}\right)$ angenommen wird. Man hat folglich diesen Bruch, den Multiplicand, durch den Nenner des Multiplicators (d) zu dividiren, und den Quotienten mit dem Zähler desselben (c) zu multipliciren. Beide Operationen sind also an dem Bruch mit ganzen Zahlen zu verrichten, und die Regeln dafür bekannt. Die Division durch den Nenner des Multiplicators geschieht allgemein (nach §. 28. 2) durch Multiplication mit dem Nenner des Multiplicands $\left(\frac{a}{b} : d = \frac{a}{bd}\right)$, und die Multiplication des gefundenen Theils oder Quotienten mit dem Zähler des Multiplicators (nach §. 27. 1) durch Multiplication mit dem Zähler des Multiplicands $\left(\frac{a}{bd} \cdot c = \frac{ac}{bd}\right)$. Um daher **einen Bruch mit einem andern zu multipliciren, multiplicirt man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, und macht die Producte in derselben Ordnung zum Zähler und Nenner eines neuen Bruchs.**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ableitung der Regel an einem Zahlenbeispiel mit verändertem Ausdruck.

2. In besonderen Fällen ließe sich die Division durch den Nenner des Multiplicators (nach §. 28. 1) auch durch Division in den Zähler, und die Multiplication mit seinem Zähler (nach §. 27. 2) durch Division in den Nenner des Multiplicands verrichten. Dasselbe gilt auch noch für einzelne Factoren im Zähler und Nenner des Multiplicators. Die damit bezweckten Abkürzungen können indessen auch bei der Berechnung des Products nach der allgemeinen Regel erhalten werden, wenn man vor der wirklichen Ausfüh-

rung der vorgeschriebenen Multiplicationen die in den Zähler und Nenner eintretenden gleichen Factoren aufhebt.

Alle möglichen, hier angedeuteten Fälle, in so fern mit dem ganzen Zähler oder dem ganzen Nenner des Multiplicators die erforderliche Division verrichtet werden kann, sind mit kurzer Angabe der Voraussetzung und des einzuschlagenden Rechnungsganges in Zahlen- oder Buchstabenbeispielen darzustellen, und die Resultate allemal auch nach der allgemeinen Regel abzuleiten. Dazu einige verwickeltere Beispiele, in welchen die abkürzende Rechnung nur mit einzelnen Factoren im Zähler oder Nenner des Multiplicators vorgenommen werden kann, in stufenweisem Fortschritt bis zu der möglichst vereinfachenden Entwicklung eines Products, wie etwa des hier angedeuteten: $\frac{9cc - xx}{5mp + 5mq} \cdot \frac{20m}{3cr + rx}$.

3. Die Multiplication mit einem echten Bruche giebt stets ein Product, welches kleiner, mit einem unechten Bruche, der nicht als uneigentlicher Bruch $= 1$ ist, ein solches, welches größer ist als der Multiplicand. Dieß folgt aus dem Begriffe der Multiplication und des echten und unechten Bruchs von selbst.

Auszuführen.

Womit ist die Multiplication einer (ganzen oder gebrochenen) Zahl a mit einem Stammbruche $\frac{1}{b}$, also $a \cdot \frac{1}{b}$, gleichbedeutend?

Was erhält man zum Product, wenn ein Bruch mit seinem umgekehrten Werthe, d. i. mit einem Bruche, der den Nenner des vorigen zum Zähler und dessen Zähler zum Nenner hat, multiplicirt wird?

4. Es ergiebt sich ferner aus der allgemeinen Regel für die Multiplication zweier Brüche, in Verbindung mit dem Satze (§. 10. 4), daß zwei unbenannte ganze Zahlen als Factoren eines Products ihre Geschäfte beliebig mit einander verwechseln dürfen, die Zulässigkeit dieses Austauschs in den Verrichtungen beider Factoren auch für den Fall, daß beide gebrochene Zahlen sind, — vorausgesetzt natürlich, daß sie als unbenannt gedacht werden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

Damit ist denn die Zulässigkeit der Factorenverwechslung für je zwei Zahlen von beliebiger Form, oder für Zahlen überhaupt, bewiesen.

5. Eben so leicht rechtfertigt sich der für ganze Zahlen schon früher (§. 10. 10) bewiesene Satz, daß auch mehr als zwei Factoren

in jeder beliebigen Ordnung zum Product vereinigt werden können, auch für die Voraussetzung, daß einige dieser Factoren oder alle Brüche sind. Denn das Product aller ihrer Zähler und der etwa vorhandenen ganzen Zahlen muß eben so wohl wie das der Nenner für sich berechnet werden, und in beiden ist die Ordnung der Factoren willkürlich.

So ist z. B. $a \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{d}{e} \cdot \frac{f}{m} = \frac{abdf}{cem} = \frac{bafd}{cme} =$

$\frac{b}{c} \cdot a \cdot \frac{f}{m} \cdot \frac{d}{e}$ ꝛc.

Andere Anordnungen auf ähnliche Art abzuleiten.

Anmerk. Sehr viele Aufgaben des alltäglichen Lebens führen auf solche Rechnungen, in denen Zähler und Nenner eines Bruchs sich aus einer Reihe von Factoren zusammensetzen. Der Practiker, dem an möglichster Kürze und Einfachheit der Arbeit gelegen ist, wird in solchen Fällen wohl thun, die geforderten Multiplicationen immer erst anzudeuten, um, bevor er zur wirklichen Ausführung schreitet, die in den Zähler und Nenner kommenden gleichen Factoren erst gegen einander aufzuheben.

Beispiele.

6. Auch diejenigen Regeln endlich, welche die Multiplication aus Theilen zusammengesetzter Factoren betrafen (§. 10. 5, 6 und 7), bleiben unverändert, wenn statt der früher vorausgesetzten ganzen Zahlen Brüche als Theile der Factoren angenommen werden. Die Vorstellung von Theilen wird dadurch nicht geändert; nur aus dieser Vorstellung aber fließt die Vorschrift her, welche angiebt, was mit jedem Theile vorgenommen werden soll; also nicht das, was verlangt wird, sondern nur die Art und Weise, wie dieses zur Ausführung kommt, richtet sich nach der besondern Beschaffenheit des Theils.

Wer noch einen anderen, gleichsam mehr in die Augen fallenden Beweis für diese Behauptung verlangt, kann denselben (gleich von der §. 10. 7 gemachten Voraussetzung ausgehend, welche die beiden vorigen als besondere Fälle unter sich begreift — ?) nach folgender Andeutung führen:

$$\left(\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{m}{n} \mp \frac{p}{q}\right) = \left(\frac{ad}{bd} \mp \frac{bc}{bd}\right) \cdot \left(\frac{mq}{nq} \mp \frac{np}{nq}\right)$$

$$= \frac{ad \mp bc}{bd} \cdot \frac{mq \mp np}{nq} = \frac{(ad \mp bc) \cdot (mq \mp np)}{bd \cdot nq}$$

$$= \frac{admq \mp bcmq \mp adnp + bcnp}{bdnq}$$

$$= \frac{admq}{bdnq} \mp \frac{bcmq}{bdnq} \mp \frac{adnp}{bdnq} + \frac{bcnp}{bdnq}$$

$$= \frac{am}{bn} \mp \frac{cm}{dn} \mp \frac{ap}{bq} + \frac{cp}{dq}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \mp \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} \mp \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} + \frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q}$$

Das Zeichen $\mp$ ist $+$ oder $-$ zu lesen, so daß sich immer das untere auf die erste, das obere auf die zweite Voraussetzung bezieht. Sollte statt eines der angenommenen Brüche eine ganze Zahl gesetzt werden, so hat man nur den entsprechenden Nenner $= 1$ zu setzen.

Dem Schüler ist die Ergänzung dieser Zeichensprache durch Worte überlassen.

B. wie $6\frac{2}{3}$ Rthl. . $4\frac{1}{2}$;

$$\left(\frac{aa}{bb} - \frac{ab}{2xy} + \frac{bb}{yy}\right) \times \left(\frac{3aa}{xx} - \frac{2ab}{5xy} + \frac{bb}{yy}\right) \text{ u. a.}$$

Anmerk. Mit großem Vortheil werden die vorstehenden Sätze besonders oft beim Rechnen mit benannten Zahlen angewandt.

Enthält der Multiplicand Theile von verschiedenen, jedoch gleichartigen Benennungen, so wird man auch mit einem Bruch, ebenso wie früher mit ganzen Zahlen, in der Regel lieber jeden Theil für sich, als das Ganze, nachdem man es auf gleiche Benennung gebracht hat, auf einmal multipliciren. Jenes Verfahren ist besonders dann vorzuziehn, wenn das Product wieder in denselben Einheiten verschiedenen Ranges, wie der Multiplicand, angegeben werden soll, und wenn der Nenner des Multiplicators und diejenigen Zahlen, welche die Menge niedrigerer Einheiten bestimmen, die auf eine höhere gerechnet werden, Factoren mit einander gemein haben; z. B.

$$(98 \text{ Ctn. } 29 \text{ Pfd. } 12\tfrac{1}{2} \text{ Lth.}) \cdot \tfrac{3}{8}$$
(wenn 1 Ctn. = 100 Pfd., 1 Pfd. = 32 Lth.)

$$\begin{aligned} &= 36 \text{ Ctn. } 75 \text{ Pfd.} \\ &\quad + 10 \text{ Pfd. } 28 \text{ Lth.} \\ &\quad\quad + 4\tfrac{1}{2} \text{ Lth.} \\ &\quad\quad + \tfrac{3}{16} \text{ Lth.} \\ &= 36 \text{ Ctn. } 86 \text{ Pfd. } \tfrac{11}{16} \text{ Lth.} \end{aligned}$$

Die ausführliche Erörterung an diesem und anderen Beispielen ist dem Schüler überlassen.

Ist der Multiplicator ein Bruch, dessen Nenner sich bequem in Factoren zerlegen lässt, so zerfällt man ihn erst absichtlich in kleinere, zumal Stammbrüche, multiplicirt mit einem nach dem andern und addirt zuletzt alle Theilproducte. Die Multiplication mit diesen Stammbrüchen kommt dann auf bloße Divisionen mit ganzen Zahlen zurück. Ist ein folgender Multiplicator aliquoter Theil eines vorigen, so braucht man das mit diesem erhaltene Product nur wieder mit dem anderen Factor im Nenner des neuen Bruchs zu dividiren.

Um z. B. 39 Ctn. 15 Pfd. 20 $\frac{3}{4}$ Lth. mit $\frac{11}{12}$ zu multipliciren, zerlegt man zunächst $\frac{11}{12}$ in $\frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, multiplicirt dann mit $\frac{1}{2}$ (oder dividirt durch 2), das erhaltene Product wieder mit $\frac{1}{2}$ und auch mit $\frac{1}{3}$ (oder dividirt dasselbe nochmals durch 2 und auch durch 3), schreibt die Producte gehörig unter einander und addirt sie; also

39	Ctn.	15	Pfd.	20 $\frac{3}{4}$	Lth.	. . . . . .	m
19	:	57	:	26 $\frac{3}{8}$	:	. . . . . .	$m \frac{1}{2}$
9	:	78	:	29 $\frac{3}{16}$	:	. . . . . .	$(m \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2}$
6	:	52	:	19 $\frac{11}{24}$	:	. . . . . .	$(m \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{3}$
35	:	89	:	11 $\frac{1}{48}$	:		

Eben so gut hätte sich auch $\frac{11}{12}$ in $\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12}$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ zerlegen, oder durch $1 - \frac{1}{12}$ ausdrücken, und demgemäß die Rechnung einrichten lassen.

Weiter auszuführen; auch Beispiele, in welchen der Multiplicator eine gemischte Zahl ist.

Zum Schluß mag noch ausdrücklich bemerkt werden, wie die vorigen Sätze die allgemeinere Behauptung rechtfertigen, daß alle die Regeln und Sätze, welche zunächst nur für die Multiplication ganzer Zahlen, namentlich für Factoren von zusammengesetzter Form, entwickelt wurden (§. **10. 4** bis **10**), auch dann, wenn diese Factoren Brüche oder aus Brüchen zusammengesetzt sind, ihre Richtigkeit behalten, mithin von Zahlen überhaupt gelten.

§. 30.

Division ganzer und gebrochener Zahlen durch Brüche.

1. Die letzte noch übrige Aufgabe der Bruchrechnung, nämlich durch einen Bruch zu dividiren, kann nunmehr in völliger Allgemeinheit erledigt werden, mag der Dividend eine ganze oder eine gebrochene Zahl sein. Sie verlangt, daß eine vorangegangene Multiplication mit dem Divisor wieder aufgehoben werde. Die Multiplication an oder mit einem Bruche kam aber stets darauf zurück, daß mit dem Zähler desselben multiplicirt, und durch den Nenner dividirt wurde. (In besonderen Fällen konnte das Product eine ganze Zahl werden). Soll nun diese Operation wieder aufgehoben werden, so hat man am Product oder Dividend die gerade entgegengesetzten Rechnungsarten mit dem Zähler und Nenner seines einen Factors vorzunehmen, also durch den Zähler des Divisors zu dividiren und mit dem Nenner desselben zu multipiciren.

Wie dieß geschieht, ist schon vorhin gezeigt. Demnach ist

$$a : \frac{c}{d} = \frac{ad}{c}, \text{ und}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Mit den gefundenen Quotienten ist die sogenannte Probe zu machen, dann auch an Zahlenbeispielen die Richtigkeit der Regel zu zeigen, indem man für jede Voraussetzung erst ein Product bildet und dasselbe nachher durch Division wieder auflöst.

Die vorgeschriebene Rechnung ist offenbar dieselbe, als wenn man mit einem Bruche, der den Zähler des Divisors zum Nenner, und dessen Nenner zum Zähler gehabt, den Dividend hätte multipliciren sollen. Man spricht daher die Regel kürzer, und um sie dem Gedächtniß leichter einzuprägen, auch so aus: **um durch einen Bruch zu dividiren, kehrt man ihn um und multiplicirt.**

$$a : \frac{c}{d} = a \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{c}, \text{ und}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Um die Regel gleich in dieser Form abzuleiten, hätte man sich auch auf das Resultat berufen dürfen, welches aus der Multiplication eines Bruchs mit seinem umgekehrten Werthe (S. §. 29. 3) entspringt.

Auszuführen.

Obwohl die vorige Schlußfolge klar und überzeugend ist, so pflegen doch Anfänger in der Anwendung der daraus herfließenden Regel häufig Dunkelheiten und Schwierigkeiten zu finden, welche meistens aus einer zu beschränkten Auffassung des Sinnes der Division herrühren. Es wird deßhalb von Nutzen sein, auch noch besonders aus jeder der zwei Bedeutungen, deren diese Rechnungsart fähig ist, die obige Regel abzuleiten.

Soll aber die Aufgabe 1, $a : \frac{c}{d}$ oder 2, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ als **Vergleichung** gedacht werden, so ist es vor allen Dingen nöthig, den Dividend mit dem Divisor (gleichartig oder) gleichnamig zu machen. Bekanntlich führt dieß auf nachstehende Formverände=

rungen 1, $\frac{ad}{d} : \frac{c}{d}$ und 2, $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd}$. Da nun Dividend und Divisor gleichvielte, also gleiche Theile der Einheit zählen, so kann sich die Vergleichung auf die Mengen der in beiden enthaltenen Theile, d. h. auf ihre Zähler beschränken, deren Verhältniß das verlangte ist. Also

$$1,\ \frac{ad}{d} : \frac{c}{d} = ad : c = \frac{ad}{c},\ \text{und}$$

$$2,\ \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = ad : bc = \frac{ad}{bc},\ \text{wie oben.}$$

Soll dagegen der Divisor $\frac{c}{d}$ als Multiplicator die Art und Weise der Bildung des Productes vorgezeichnet haben, so erinnere man sich, daß die gesuchte Zahl (der Multiplicand) seiner Vorschrift gemäß erst in d gleiche Theile zerlegt, und ein solcher Theil c mal hat wiederholt werden müssen. Man hat sich also vorzustellen, der gegebene Dividend (das Product) 1, a oder 2, $\frac{a}{b}$ sei aus c gleichen Theilen zusammengesetzt. Um daher zunächst einen dieser Theile wieder zu finden, muß man den Dividend rückwärts in c gleiche Theile zerlegen, oder durch c dividiren. Dieß giebt 1, $\frac{a}{c}$ oder 2, $\frac{a}{bc}$. Diesen Theil aber erhielt man dadurch, daß man die gesuchte Zahl in d gleiche Stücke zerlegte. Umgekehrt also wird diese wieder gefunden, wenn man jenen Theil d mal nimmt, oder mit d multiplicirt. Demnach ist wie vorhin 1, $\frac{ad}{c}$ und 2, $\frac{ad}{bc}$ der verlangte Quotient.

Wiederholung dieser Ableitung an Zahlenbeispielen. — Zu mehrseitiger Begründung der Regel kann auch die Auflösung nachstehender oder ähnlicher Aufgaben zweckmäßig benutzt werden:

Eine Elle kostet $^3/_8$ ($^1/_4$, $1^1/_4$) Rthl., wie viele Ellen erhält man für 6 Rthl., $^2/_3$ Rthl., $2^1/_2$ Rthl.? — $^2/_3$ ($^1/_2$, $3^3/_4$) Pfd. kosten 12 Gr., $^1/_4$ Rthl., $5^1/_2$ Rthl., wie viel 1 Pfd.? rc.

2. Die vorige allgemeine Regel der Division durch einen

Bruch könnte auf mannigfaltige Weise abgeändert werden, wenn man auf die besonderen Fälle Rücksicht nehmen wollte, wo die Division durch den Zähler und die Multiplication mit dem Nenner des Divisors sich durch Division am Dividend verrichten ließen. Wer indessen nur weiß, was mit dem Zähler und Nenner des Divisors vorzunehmen ist, und die früheren Regeln der Bruchrechnung kennt, wird die im einzelnen Falle sich darbietenden Rechnungsvortheile auch ohnehin schon entdecken. Jedenfalls erhält man die möglichen Abkürzungen eben so sicher, wenn man, wie schon einmal gerathen wurde, vor der wirklichen Ausführung die vorzunehmende Rechnung nur erst andeutet und die gleichen Factoren im Zähler und Nenner des zusammenzusetzenden Bruchs zuvor gegen einander aufhebt.

Angabe solcher specieller Regeln, Erläuterung durch Beispiele rc. — mit den nöthigen Modificationen, wie es bei §. 29. 2 gefordert wurde.

3. Die Division durch einen echten Bruch giebt einen Quotienten, welcher größer, durch einen unechten Bruch, der größer als 1 ist, einen Quotienten, welcher kleiner ist, als der Dividend.

Weßhalb?
Womit stimmt die Division durch einen Stammbruch überein?

4. Die Regeln für das Dividiren mit Zahlen von zusammengesetzter Form dürfen unverändert so, wie sie (§. 11. 6 bis 9) zunächst für ganze Zahlen entwickelt wurden, auch auf Brüche angewandt werden, weil die entsprechenden Multiplicationsregeln, aus denen sie durch bloße Umkehrung herfließen, ebenfalls so gut von Brüchen wie von ganzen Zahlen gelten (§. 29. Schluß).

$$(\tfrac{5}{6}xy - \tfrac{2}{5}x + 1) : \tfrac{2}{5}x = ?$$

$$\left(\frac{aa}{2bb} - \frac{19a}{4} - 10bb\right) : \left(\frac{2a}{3b} + \frac{5b}{2}\right) = ?$$

u. a. B.

Entwickelung des Quotienten $1 : (a - 1)$; $a : (b \mp c)$ nach §. 11. 9 in unendliche Reihen (um die ersten Ideen solcher Reihen anzuregen) und Vergleichung der Resultate, wenn man in ihnen statt der Buchstaben bestimmte Zahlen, z. B. im ersten Quotienten $a = 3$ setzt, mit denen, welche durch Einführung dieser Werthe in die Aufgabe selbst unmittelbar gewonnen werden.

§. 31.

Schlussbemerkungen.

1. Es wurde schon im Eingange dieses Abschnitts (§. 22. 3) bemerkt, daß die Bruchform die allgemeinere Zahlform ist, indem auch ganze Zahlen als Brüche, mit dem Nenner 1, geschrieben werden dürfen. Man kann demgemäß sämmtliche Regeln der Bruchrechnung, insofern es nicht auf ihre Ableitung, sondern auf ihre Anwendung und das leichtere Behalten derselben ankommt, auf diejenigen beschränken, welche die Verbindung von zwei Brüchen betreffen. Bei der Additions- und Subtractionsregel war es ohnehin überflüssig, den Unterschied der beiden Fälle zu berücksichtigen, wenn nur eine oder beide gegebene Zahlen Brüche waren. Aber auch die Multiplication ganzer und gebrochener Zahlen (§. 27.) und die Division durch ganze Zahlen (§. 28. und auch schon §. 11. 5, c) lassen sich als besondere Fälle unter die zuletzt (§. 29. und 30.) aufgestellten Regeln bringen, welche zwei Brüche für diese Rechnungsarten annehmen, sobald man die ganzen Zahlen mit dem Nenner 1 versieht.

An Beispielen nachzuweisen.

Auf gleiche Weise könnte man endlich auch die Addition, Subtraction und Multiplication in ganzen Zahlen den Regeln der Bruchrechnung unterwerfen, wofern man diese Zahlen als Brüche mit dem Nenner 1 schriebe. Freilich wird damit für das Rechnen selbst nichts gewonnen, weil dieses doch wieder auf die nämlichen Operationen in ganzen Zahlen zurückkommt; vielmehr wird die äußere Form der Rechnung dadurch nur weitläufiger gemacht. Indessen geht aus dem Gesagten hervor, daß, so wie die Form des Bruchs als die allgemeinere Form der Zahl, ebenso auch die Regeln, nach welchen zwei Brüche durch eine der vier einfachen Rechnungsarten zu verknüpfen sind, als die allgemeineren Rechnungsregeln angesehen werden können.

2. Wir dürfen ferner, in ein Resultat zusammenfassend, was bei jeder Rechnungsart im Einzelnen nachgewiesen ist, die Behauptung aufstellen, daß alle diejenigen Sätze und Vorschriften, welche das Rechnen mit Zahlen von zusammengesetzter Form betreffen und

im zweiten Abschnitt zunächst nur von ganzen Zahlen bewiesen sind, unverändert auch von Brüchen, mithin allgemein von Zahlen überhaupt gelten. — Es könnte auffallen, daß hierbei nur Summen, Reste und Producte von Factoren, und nicht auch Quotienten als zusammengesetzte Zahlformen in Betracht gezogen sind. Da inzwischen Quotienten aus ganzen (§. 11. 5, c) und gebrochenen Zahlen (§. 28. und 30.) immer als Brüche dargestellt werden können, so haben alle Fragen in Bezug auf das Rechnen mit ihnen in der Bruchrechnung ihre vollständige Erledigung gefunden, und konnten früher um so eher mit Stillschweigen übergangen werden, da sie ohne Zuziehung der Bruchform nicht einmal eine allgemeine Lösung zugelassen hätten.

3. Zum Beschluß verweisen wir noch einmal auf die an die Spitze der Bruchrechnung gestellte Forderung zurück, daß nämlich das Resultat jeder Operation mit Brüchen, wo möglich, selbst wieder als Bruch oder ganze Zahl erscheinen sollte. Beide Formen liegen als nothwendig im Begriffe der Zahl begründet, und eine andere giebt es nicht. Die vorstehenden Regeln haben bewiesen, daß es allemal möglich ist, jener Bedingung nachzukommen, mithin als Resultat jeder Rechnung, welche nichts weiter als die vier Grundoperationen mit ganzen oder gebrochenen Zahlen zu verrichten hat, stets wieder eine Zahl von dieser oder jener Form gefordert werden kann.

Gleichwohl könnte die Befolgung gewisser Regeln, deren Anwendung nur in bestimmten Voraussetzungen zugelassen wurde, eben wenn diese Beschränkungen wegfielen, auch verwickeltere Zahlformen nach sich ziehen. So würden namentlich, wenn man allgemein einen Bruch mit einer ganzen Zahl, nach §. 27. 2, ohne die hinzugefügte Bedingung zu beachten, durch Division in den Nenner multipliciren, oder einen Bruch durch eine ganze Zahl, nach §. 28. 1, vermittelst Division in den Zähler dividiren, oder durch gleichzeitige Anwendung beider Regeln zwei Brüche mit einander multipliciren, oder einen durch den andern dividiren wollte, in den meisten Fällen Brüche entstehen, deren Nenner oder Zähler oder beide zugleich selbst schon gebrochene Zahlen wären. Auf diese Weise behandelt würde z. B.

$$1)\quad \frac{2}{5}.3=\frac{2}{\frac{5}{3}}\quad\left[=\frac{2.3}{5}=\frac{6}{5}\right]$$

$$2)\quad \frac{2}{5}:3=\frac{\frac{2}{3}}{5}\quad\left[=\frac{2}{5.3}=\frac{2}{15}\right]$$

$$3)\quad \frac{4}{5}.\frac{3}{11}=\frac{\frac{4}{11}}{\frac{5}{3}}\quad\left[=\frac{4.3}{5.11}=\frac{12}{55}\right]$$

$$4)\quad \frac{4}{5}:\frac{3}{11}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{11}}\quad\left[=\frac{4.11}{5.3}=\frac{44}{15}\right]$$

oder in allgemeinen Zeichen:

$$1)\quad \frac{a}{b}.c=\frac{a}{\frac{b}{c}}\quad\left[=\frac{ac}{b}\right]$$

$$2)\quad \frac{a}{b}:c=\frac{\frac{a}{c}}{b}\quad\left[=\frac{a}{bc}\right]$$

$$3)\quad \frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{d}}{\frac{b}{c}}\quad\left[=\frac{ac}{bd}\right]$$

$$4)\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}\quad\left[=\frac{ad}{bc}\right]$$

Man nennt solche Formen **Bruchsbrüche** oder **gebrochene Brüche**. Hier, wo ihre Entstehung angegeben ist, braucht man nur die ursprünglichen Aufgaben auch nach den allgemein zulässigen Vorschriften zu berechnen, um eben das, was sie bezeichnen sollen, auch durch gemeine Brüche auszudrücken. Diese sind in den Einschließungszeichen [] jeder neben den gleichgeltenden Bruchsbruch gesetzt.

Wollte man indessen Zahlformen, wie die vorstehenden, sogenannte Bruchsbrüche, überall in der Rechnung zulassen, so bedürfte es nur einer geringen Erweiterung der Definition des Bruchs, dieselben zu deuten und demgemäß, auch ohne auf ihren Ursprung zurückzugehn, in gemeine Brüche von gleichem Werthe umzuformen. Man müsste nämlich die Bedingung, daß Zähler und Nenner eines Bruchs ganze Zahlen sein sollen, aufheben und einen Bruch jede Verbindung zweier Zahlen nennen, deren eine, der Nenner, das bestimmt, was eigentlich in dem Bruche gezählt wird, indem sie die Art und Weise angiebt, wie es gesetzt werden muß, um die Einheit zu erhalten, während die andere, der Zähler anzeigt, wie eben dasselbe gesetzt werden muß, um die darzustellende Größe zu bekommen. Es ist leicht, hiernach die Bedeutung der vorigen und ähnlicher Ausdrücke anzugeben. So bezeichnet z. B. $\frac{2}{\frac{5}{3}}$ das Doppelte einer Größe, deren dritter Theil fünfmal genommen die Einheit giebt; $\frac{\frac{2}{3}}{5}$ zwei Drittel von dem fünften Theile der Einheit u. s. w. Dem Sinne eines solchen Ausdrucks nachgehend, und was er verlangt, nach bekannten Regeln vollführend, würde man seinen Werth in jedem Falle leicht auf einen gemeinen Bruch zurückführen können und diesen, wenn die Aufgabe bekannt ist, aus welcher der Bruchsbruch entsprang, mit dem aus ihr unmittelbar abgeleiteten stets in Uebereinstimmung finden.

Nach diesen Andeutungen sind einige Bruchsbrüche aus Rechnungsaufgaben abzuleiten, ihre Bedeutungen dem erweiterten Begriffe des Bruchs gemäß aus einander zu setzen und durch Linien oder andere bildliche Darstellungen zu veranschaulichen, und ihre Werthe eben sowohl aus jenen Erklärungen als den anfänglichen Aufgaben, welche ihre Entstehung veranlassten, in gewöhnlicher Bruchform herzustellen.

Aber auch ohne die Bedeutung solcher Bruchsbrüche im Einzelnen zu verfolgen, kann man aus dem eben aufgestellten allgemeineren Begriffe des Bruchs gleich die allgemeine Regel ihrer Verwandlung in einfache Brüche herleiten. Denn nach der vorigen Erklärung ist ein Bruchsbruch, so gut wie jeder gemeine Bruch, mit einem Quotienten gleichbedeutend, der aus der Division des Zählers durch den Nenner entspringt. Ein Quotient soll nämlich in dem einen Sinne der Division eine Zahl sein, die so gesetzt, wie der Divisor vorschreibt, den Dividend erzeugt. Ein Bruch mit dem Zähler 1, dessen Nenner der Divisor ist, würde nun, der obigen Erklärung zufolge, ein Etwas bezeichnen, das so gesetzt, wie dieser vorschreibt, die Einheit erzeugt. Ein Vielfaches dieses

Etwas oder eine Menge aliquoter Theile desselben, eben so gesetzt, giebt folglich dasselbe Vielfache oder dieselbe Menge gleichvielter Theile der Einheit. Jenes Vielfache oder jene Menge aliquoter Theile bezeichnet der Zähler des Bruchs. Macht man also, anstatt 1, den Dividend zum Zähler des Bruchs, so giebt dieser, mit seinem Nenner, dem Divisor, multiplicirt, den Zähler oder Dividend zum Product, d. h. der Bruch ist Quotient aus der Division des Zählers durch den Nenner.

Es ist überflüssig, diese Uebereinstimmung auch bei der zweiten Bedeutung der Division nachzuweisen, da wir wissen, daß der Quotient aus jeden zwei beliebigen Zahlen derselbe bleibt, gleichviel ob man der Operation die eine oder andere Bedeutung unterlegt.

Die Regel für die Verwandlung eines gebrochenen Bruchs in einen gemeinen ergiebt sich hieraus von selbst. Man nehme ihn als aufgegebene Division des Zählers durch den Nenner und führe diese nach bekannten Regeln aus.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Andere Beispiele in Zahlen und Buchstaben sind nach dieser Regel zu behandeln. Auch unterlasse man nicht, auf den Unterschied der Bedeutungen aufmerksam zu machen, die ein aus drei Zahlen zusammengesetzter Bruchsbruch annimmt, jenachdem man die mittlere Zahl zum Zähler oder Nenner zieht, wie $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ und $\frac{a}{\frac{b}{c}}$.

Ist man hinreichend vertraut mit der Bedeutung und der Regel für die Umbildung solcher verwickelteren Bruchformen, so mag man sich dieselben immerhin, zumal im Ansatze einer Rechnung, erlauben. Es würde aber zu unnöthigen Weitläufigkeiten führen, wenn man für das Rechnen mit denselben noch besondere Regeln entwickeln wollte, die überdieß den Regeln für das Rechnen mit gemeinen Brüchen vollkommen entsprechen würden.

Fünfter Abschnitt.

Die vier einfachen Rechnungsarten mit Decimalbrüchen.

---

§. 32.

Begriff, Bezeichnung, Eintheilung und Aussprechen der Decimalbrüche.

1. Bei der erstaunlichen Vereinfachung, welche das Rechnen mit zusammengesetzten ganzen Zahlen durch die früher (im dritten Abschnitt) entwickelten Mechanismen erhielt, musste sich wenigstens die Wissenschaft die Aufgabe stellen, ob sich nicht auch die Rechnung mit Brüchen ähnlicher Vortheile theilhaftig machen ließe. Die Möglichkeit, Methoden zu erfinden, welche es fast eben so leicht machen, mit größeren, wie mit kleineren Zahlen zu rechnen, beruhte aber lediglich auf der künstlichen Bildung und Bezeichnung dieser Zahlen selbst. Nur die regelmäßige Gliederung größerer Zahlen in kleinere, durch allmäliges Aufsteigen von ursprünglichen zu höheren Einheiten, und die strenge, einförmige Ordnung dieser Theile war die Quelle der bewunderungswerthen Einfachheit jener Methoden. Sollen also ähnliche Rechnungsmechanismen auf Brüche angewandt werden können, so müssen diese selbst schon nach ähnlichen Gesetzen wie ganze Zahlen gebildet sein.

Bei unseren, allein gebräuchlichen, dekadischen Zahlen zählt jeder höhere Theil Einheiten, die das Zehnfache der vorhergehenden, umgekehrt also jeder niedrigere Einheiten, die nur noch den zehnten Theil der vorigen betragen. Es lag also die Idee sehr nahe, dasselbe Gesetz auch noch abwärts von den Einern auf tiefere Stellen auszudehnen. Auf diese Weise erhält man zunächst nach den Einern Zehntel, dann Hundertstel, Tausendstel, Zehntausendstel u. s. f.— Man hat diesen **Brüchen, deren Nenner höhere dekadische Einheiten**, also **zehn** oder **Producte aus lauter Zehnen sind**, den Namen **zehntheilige** oder **Decimalbrüche** gegeben.

2. Wie sich die Bildung dieser Brüche der Bildung ganzer Zahlen anschließt, so ist es auch natürlich, die Bezeichnung derselben von jenen zu entlehnen. Die wesentlichste Abkürzung beim Schreiben ganzer Zahlen besteht darin, daß man nicht jeder Ziffer ausdrücklich den Namen der gezählten Einheiten beisetzt, sondern diesen aus der Stelle erkennen läſſt, welchen man ihr giebt. Auf gleiche Weise könnte man die Ziffern, welche die Mengen der Zehntel, Hundertstel, Tausendstel u. s. f. bezeichnen, also die Zähler der stufenweise niedrigeren Decimalbrüche — vorausgesetzt, daß diese nie die Grundzahl zehn erreichen — in absteigender Ordnung auf die Einerziffern folgen lassen, ohne die Nenner hinzuzufügen. Auch so noch würde bloß schon die Stelle jeder Ziffer, nach demselben Gesetz wie bei ganzen Zahlen, den Rang ihrer Einheit, deren Namen und Werth erkennen lassen, wenn nur die Einerziffer — was nicht zu übersehen ist, da diese nun nicht mehr den letzten Platz in der Zahl einnimmt — auf besondere Art kenntlich gemacht wäre. Zu diesem Zwecke ist das sogenannte **Decimalkomma** (,) — auch wohl ein Punkt — eingeführt, welches rechts unten neben die Einerziffer gesetzt wird, wenn noch Decimalbrüche auf dieselbe folgen. Hiernach schreibt man z. B. 4 und $\frac{3}{10}, \frac{7}{100}, \frac{5}{1000}$ abgekürzt 4, 375; und 50, 9 bedeutet so viel als $50\frac{9}{10}$.

Andere B.

Es versteht sich übrigens von selbst, daß bei dieser abgekürzten Art, Decimalbrüche zu schreiben, welche wie bei ganzen Zahlen den Werth jeder Ziffer von ihrer Stellung abhängig macht, keine frühere Stelle unbesetzt bleiben darf, so lange noch Ziffern von niedrigerem Range vorkommen. Laufen daher die Nenner der neben einander zu schreibenden Decimalbrüche nicht ununterbrochen fort, so müssen die fehlenden Stellen im Zähler mit Nullen ausgefüllt werden. So schreibt man z. B. $716\ \frac{3}{10}\quad\frac{8}{1000}$ abgekürzt 716, 308, weil die Hundertstel ausgefallen sind. Kommen neben dem Bruche keine Ganze vor, so muß doch die Stelle der Einer ebenfalls durch das Zeichen 0 mit beigesetztem Komma angezeigt werden; z. B. $\frac{6}{10}$ wird geschrieben 0, 6

$\frac{5}{100}$ und $\frac{1}{10000}$ " " 0, 0501

Andere B.

3. Man könnte indessen fragen, ob die angegebene Bezeichnungsart auch allgemein anwendbar sei, da sie auf der scheinbar sehr engen Voraussetzung beruht, daß die Decimalbrüche jeden Ranges nur Einerzahlen als Zähler haben, oder lauter sogenannte einfache Decimalbrüche seien. Da jedoch, wie leicht zu erweisen, jeder zusammengesetzte Decimalbruch, d. h. ein solcher, dessen Zähler eine mehrziffrige Zahl ist, in lauter einfache mit steigenden oder fallenden Nennern zerlegt werden kann, deren Zähler die einzelnen geltenden Ziffern seines Zählers werden, so ist klar, daß jeder Decimalbruch ohne Ausnahme nach der vorigen Methode, mit Weglassung des Nenners, geschrieben werden kann.

So ist z. B. $\frac{5803}{10000}$

$$= \frac{5000}{10000} + \frac{800}{10000} + \frac{3}{10000}$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{8}{100} + \frac{3}{10000},$$ also abgekürzt geschrieben

$$= 0,\ 5803.$$

Andere B. — Weßhalb die angegebene Zerlegung sich immer bewerkstelligen lasse?

4. Umgekehrt läßt sich eben so leicht jede Reihe einfacher Decimalbrüche mit steigenden Nennern in einen einzigen zusammenziehn, indem man nur, wenn die Nenner stetig fortschreiten, ihre Zähler in derselben Folge (von oben her) neben einander stellt, wenn die Reihe unterbrochen ist, für die fehlenden Ordnungen Nul-

len einschiebt, und der so gebildeten Zahl den höchsten Nenner (des niedrigsten Bruchs) als gemeinschaftlichen untersetzt; z. B.

$$\frac{9}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{7}{10000} + \left[\frac{0}{100000}\right] + \frac{4}{1000000}$$
$$= \frac{90000}{1000000} + \frac{5000}{1000000} + \frac{700}{1000000} \qquad + \qquad \frac{4}{1000000}$$
$$= \frac{95704}{1000000}.$$

B. und Begründung der Vorschrift.

Am leichtesten geschieht diese Zusammenziehung, wenn die Reihe solcher einfacher Decimalbrüche schon nach der vorigen Methode mit dem Komma geschrieben ist. Alsdann braucht man nur die auf das Komma folgende Ziffernreihe wie eine ganze Zahl zusammenzulesen und dieser den Nenner der letzten Ziffer zu geben; z. B. $0,41085 = \frac{41085}{100000}$. Denn in dieser Verbindung wird jede höhere Ziffer des Zählers so viel mal nach einander mit zehn multiplicirt, als noch Ziffern hinter ihr stehen; ebenso oft wird aber auch der zu ihr gehörige Nenner mit zehn multiplicirt, indem man ihn bis zum Nenner der letzten Ziffer steigert; mithin bleibt der Werth jedes einzelnen Bruchs unverändert.

B.

Hiernach ist es einerlei, ob man die auf das Decimalkomma folgenden Ziffern als eben so viele Zähler einfacher Decimalbrüche mit allmälig steigenden Nennern, oder zusammen als den Zähler eines einzigen zusammengesetzten Decimalbruchs ansehen will, dessen Nenner der Nenner der letzten Ziffer ist. Für das Aussprechen solcher Brüche zieht man die zweite Vorstellungsart vor. Anstatt z. B. 0, 438071 dem ursprünglichen Sinne gemäß 4 Zehntel, 3 Hundertstel, 8 Tausendstel u. s. f. zu lesen, spricht man bequemer 438071 Milliontel.

Andere B.

Wie bestimmt man am leichtesten den Nenner des nach der zweiten Methode ausgesprochenen Bruchs?

Auch das Schreiben so ausgesprochener Decimalbrüche hat keine Schwierigkeit, wenn man nur Acht giebt, ob gleich die höchste Ziffer des Zählers unmittelbar auf das Komma folgen darf, oder noch durch vorzusetzende Nullen davon zu trennen ist.

Wann ist dieß oder jenes der Fall? und wie bestimmt man die Zahl der Nullen, welche in dem einen Falle zwischen das Komma und die höchste Ziffer des Zählers einzuschieben sind? — B.

§. 33.

Erweiterung des Begriffs dekadisch gebildeter Zahlen. — Einfluss der Versetzung des Decimalkommas auf den Werth der Zahl.

1. Die Decimalbrüche erscheinen als die natürliche Fortsetzung des dekadischen Zahlensystems. Denselben Bildungsgesetzen folgend, reihen sie sich auch in Hinsicht der Bezeichnung den ganzen Zahlen an. Mit Fug und Recht darf man daher den Begriff dekadisch gebildeter Zahlen so erweitern, daß er auch die Decimalbrüche in sich schließt. Unter einer **dekadisch gebildeten** soll deßhalb in der Folge **jede so gegliederte Zahl** verstanden werden, **daß die Einheit jedes höheren Theils zehn Einheiten der vorigen Ordnung in sich begreift.**

Auf ganze Zahlen beschränkt, hatte die Methode der künstlichen Zahlenbildung nur nach einer Seite hin unbegrenzten Spielraum, indem sie sich nur die ins Unendliche wachsenden Zahlen unterwarf. Von den Einheiten höherer Ordnung niedersteigend brach sie bei den ursprünglichen Einheiten ab. Durch die Decimalbrüche wird ihr Gebiet, wenigstens für ein, das dekadische Zahlensystem auch nach der anderen Seite ins Unbegrenzte erweitert, so daß sie sich eben so wohl der Bildung immerfort kleiner werdender Zahlen anschmiegt. Dadurch aber erst erlangt sie den Umfang und den Grad von Allgemeinheit, welchen die Wissenschaft von einer folgerechten Darstellung aller möglichen Arten von Größenverhältnissen fordern kann.

2. In der Reihe stufenmäßig geordneter Einheiten, welche nun von jeder Stelle aus auf- und abwärts ohne Unterbrechung fortläuft, bilden die ursprünglichen Einheiten den natürlichen Anfangspunkt, von welchem aus sich die Reihe nach beiden Seiten ins Unendliche fortsetzen kann. In der Bezeichnung wird dieser

Ausgangspunkt der künstlichen Zahlenbildung durch das Decimalkomma festgestellt. Von der Stellung gegen dieses hängt die Geltung aller Ziffern einer Zahl ab. Anhängen von Nullen am Ende einer mit dem Decimalkomma geschriebenen Zahl ändert daher den Werth derselben eben so wenig, als Vorsetzen von Nullen vor ihre höchste Ziffer.

Jede Verrückung des Kommas von seinem Platze hat aber nothwendig Einfluß auf den Werth der Zahl.

Versetzung des Decimalkommas um eine Stelle niederwärts erhöht den Werth jeder Ziffer, mithin den Werth der ganzen Zahl um das Zehnfache; Versetzung desselben um eine Stelle aufwärts vermindert diesen Werth in gleichem Maße. So ist z. B. von den drei Zahlen

$$47,301$$
$$473,01$$
$$4,7301$$

die zweite das Zehnfache, und die dritte der zehnte Theil der ersten.

Wird daher das Komma in einer dekadischen Zahl um mehre Stellen niederwärts oder aufwärts gerückt, so wird die Zahl selbst dadurch mit einem Producte aus eben so vielen Zehnen, als die Menge dieser Stellen anzeigt, (oder mit einer höheren dekadischen Einheit, die mit eben so vielen Nullen geschrieben wird) im ersten Falle multiplicirt, im zweiten dividirt.

B.

Es bedarf nur einer Aenderung des Ausdrucks, um die Regeln anzugeben, wenn eine dekadische Zahl mit einer höheren Einheit ihres Systems multiplicirt oder dividirt werden soll.

Angabe dieser Regeln und B.

Man kann hiernach jede dekadische Zahl auch als einen einzigen Bruch lesen, indem man ihre Ziffern ohne Beachtung des Kommas als eine zusammengehörige ganze Zahl ausspricht, und dieser als Zähler den Nenner der letzten Ziffer giebt.

Eine so ausgesprochene Zahl schreibt man zuerst wie eine ganze

Zahl, und schneidet nachher durch das Komma vom Ende so viele Stellen ab, als der Nenner Nullen enthielt.

Begründung beider Vorschriften und B.

Vorzüge der neufranzösischen (zehntheiligen) Geld-, Maß-, Gewichts-Systeme bei den sogenannten Resolutionen und Reductionen.

§. 34.

Aufgabe der Regeln für die einfachen Rechnungsarten mit Decimalbrüchen.

Mag man nun, der vorigen Bemerkung zufolge, dekadisch gebildete ganze Zahlen mit zu den Decimalbrüchen ziehen, oder diese bloß als eine Abtheilung dekadisch gebildeter Zahlen ansehen wollen, so erhellt auf beiderlei Art, daß die Regeln, welche das Rechnen mit Decimalbrüchen leiten sollen, auch aus höherem Gesichtspunkte und in solcher Allgemeinheit entworfen werden können, daß sie überhaupt das Rechnen mit dekadisch gebildeten Zahlen im weiteren Sinne des Worts umfassen. Um den nachfolgenden Regeln diese Allgemeinheit zu geben, sollen die Decimalbrüche unter dem Namen dekadisch gebildeter Zahlen mit begriffen werden.

Es ist vorauszusehen, daß diese Regeln mit geringen Abänderungen und Zusätzen, welche das Hinzukommen der Brüche und die neue Bezeichnungsart mit dem Decimalkomma nöthig macht, auf die früheren Regeln der vier Grundoperationen mit dekadisch gebildeten ganzen Zahlen zurückkommen werden. Nur die Anwendbarkeit derselben auf den gebrochenen Theil der Zahlen bedarf erst einer neuen Begründung, die sich jedoch leicht aus den allgemeinen Regeln der Bruchrechnung mit Rücksicht auf die besonderen Voraussetzungen, denen dieselben hier anzupassen sind, ergeben wird Und wie früher, müssen auch die jetzt zu entwickelnden Regeln sich das Ziel setzen, daß die nach ihnen abgeleiteten Resultate aller vier Grundoperationen wieder in der Form der gegebenen Zahlen erscheinen.

§. 35.

Die Addition.

Um dekadische Zahlen, Decimalbrüche eingeschlossen, zu addiren, setzt man sie zunächst so unter einander, daß ihre Einerziffern, oder die Kommata, und demgemäß gleich weit von diesen abstehende Ziffern unter einander zu stehen kommen. Alsdann enthält jede Verticalreihe nur Ziffern gleichen Ranges, — nach dem Komma lauter Zähler gleichnamiger Brüche, die also (nach §. 25.) ebenso für sich zusammengezählt werden können, wie die Ziffern jeder anderen Verticalreihe vor dem Komma. Die Summe jeder Ziffernreihe behält den Rang oder Nenner ihrer Theile; das Gesetz, daß je zehn Einheiten niedrigerer Ordnung als eine der nächst höheren gezählt werden, erstreckt sich über alle Stellen der gegebenen Zahlen; man darf also, nachdem diese vorschriftsmäßig unter einander gesetzt sind, von der niedrigsten Stelle anfangend, **wie bei der Addition ganzer Zahlen** (§. 17.) **verfahren, und hat nur noch in der Summe die Einerziffer wieder mit dem Komma zu bezeichnen**; z. B.

$$\begin{array}{rr@{,\,}l} & 47 & 9 \\ + & 3 & 4105 \\ + & 0 & 967 \\ + & 216 & 028 \\ \hline = & 268 & 3055 \end{array}$$

B.

§. 36.

Die Subtraction.

Auch die Subtraction verlangt zunächst wieder Untersetzen der einen Zahl unter die andere so, daß die Einerziffern oder die Kommata und so fort aufwärts und abwärts gleich hohe Ziffern beider Zahlen unter einander zu stehen kommen. Geht der Subtrahend zu tieferen Stellen herunter, als der Minuend, so kann man sich die fehlenden Stellen des Minuends (im entgegengesetzten Falle die des Subtrahends) mit Nullen besetzt denken. Gleich hohe Ziffern nach dem Komma haben von selbst gleiche Nenner; das Verhältniß unter den Einheiten benachbarter Ziffern bleibt dasselbe wie bei ganzen Zahlen: man zieht deßhalb, von der niedrigsten Stelle anfangend, eben so wohl nach wie vor dem Komma, jeden Theil des Subtrahends von dem gleich hohen Theile des Minuends ab, borgt, wo dieser nicht ausreicht, von der nächsten höheren Ziffer desselben eine Einheit, um sie nach den Regeln des dekadischen Zahlensystems aufzulösen — verfährt überhaupt genau so wie bei der Subtraction in ganzen Zahlen (§. 18.), nur daß man auch im Reste wieder die Stelle der Einer mit dem Komma bemerkt. z. B.

$$\begin{array}{r} 4,\ 3706 \\ -0,\ 8254 \\ \hline =3,\ 5452 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 29,\ 4 \\ -\ 8,\ 5304 \\ \hline =20,\ 8696 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 376,\ 2518 \\ -376,\ 02 \\ \hline =\quad 0,\ 2318 \end{array}$$

B.

§. 37.

Die Multiplication.

Um für die Multiplication ein einfaches Verfahren zu erhalten, denke man sich zunächst die gegebenen Zahlen selbst in möglichst zusammengezogener Form, d. i. (nach §. 33. 2 am Ende) als Brüche dargestellt, deren Zähler eben diese Zahlen ohne das Komma, deren Nenner die Nenner der letzten Ziffern, also höhere dekadische Einheiten sind, welche mit eben so vielen Nullen geschrieben werden, als Decimalstellen in jeder Zahl auf das Komma folgten. Das Product dieser beiden Brüche zu bilden, multiplicirt man (nach §. 29.) die Zähler für sich und die Nenner für sich. Das Product der Nenner wird selbst wieder eine höhere dekadische Einheit, die mit eben so vielen Nullen geschrieben wird, als die beiden Factoren zusammen enthielten. Indem diese dem Product der Zähler als Nenner wiedergegeben wird, erhält man, wie es bei jeder Operation verlangt wurde, auch zum Resultate wieder einen Decimalbruch; und dieser abgekürzt, ohne seinen Nenner geschrieben, muß so viele Ziffern nach dem Komma erhalten, als der Nenner Nullen, oder was dasselbe sagt, als die gegebenen Factoren zusammen auf das Komma folgende Ziffern enthielten. z. B.

$$5,\ 318\ .\ 6,\ 04 = \frac{5318}{1000}\ .\ \frac{604}{100} =$$

$$\frac{5318\ .\ 604}{1000\ .\ 100} = \frac{3212072}{100000} = 32,\ 12072.$$

Daher die Regel: um dekadische Zahlen im weiteren Sinne des Worts zu multipliciren, **multiplicire man sie zuerst, ohne das Komma zu beachten, wie ganze Zahlen, und schneide im Producte vom Ende herein so viele Bruchziffern mit dem Komma ab, als in beiden Factoren zusammengenommen vorkommen,** die fehlenden durch Nullen ergänzend.

Hiernach die Berechnung des vorigen Beispiels:

$$\begin{array}{r} 5,318 \\ \times\ 6,04 \\ \hline 21272 \\ 31908 \\ \hline =\ 32,12072 \end{array}$$

Die Ableitung der Regel so zu wiederholen, daß ein Beispiel eingeflochten ist.

Beispiele, in welchen das Product weniger Ziffern enthält, als Decimal- (Bruch-) stellen in beiden Factoren vorhanden sind.

Dürfen Nullen am Ende des Products schon vor dem Abzählen der Bruchstellen weggelassen werden? B.

Beispiele aus der Zinsrechnung.

§. 38.

Die Division.

Auch das Verfahren der Division ergiebt sich aus bekannten Regeln der Bruchrechnung.

1. Bringt man zunächst den Divisor (nach §. 33. 2) in die Form eines einzigen Bruchs mit dem Nenner seiner niedrigsten Ziffer, so soll man (nach §. 30.) den Dividend mit dem Nenner dieses Bruchs multipliciren, und das Product durch den Zähler desselben dividiren; z. B. $32,12072 : 6,04 = 32,12072 : \frac{604}{100} = (32,12072 \,.\, 100) : 604$. Der Dividend ist eine dekadisch gebildete Zahl, der Nenner des Divisors eine höhere Einheit desselben Systems; die Multiplication mit demselben kann also (nach §. 33. 2) dadurch verrichtet werden, daß man das Komma im Dividend um so viele Stellen herunterrückt, als jene Einheit

Nullen, oder was dasselbe ist, als der Divisor Decimalstellen enthält; im vorigen Beispiele: (32, 12072 . 100) : 604 = 3212, 072 : 604.

Die mechanische Regel, um diese Multiplication mit dem Nenner des Divisors auszuführen, verlangt, daß man das Komma im Divisor weglässt (oder ans Ende setzt), und dafür im Dividend um eben so viele Stellen, als jener Bruchstellen enthielt, herunterrückt, fehlende durch Nullen ergänzend.

2. Zum Divisor bekommt man so jederzeit eine ganze Zahl. Angenommen also, man verfahre, wo es nöthig ist, zuerst nach der vorstehenden Regel, so kommt jede Divisionsaufgabe mit dekadisch gebildeten Zahlen auf die einfachere zurück, eine solche Zahl, mit oder ohne Bruchstellen, durch eine ganze Zahl zu dividiren. Im einen wie im anderen Falle kann der Dividend als ein einziger Bruch mit dem Nenner seiner letzten Ziffer angesehen werden. Um diesen durch eine ganze Zahl zu dividiren, könnte man nach der allgemein anwendbaren Vorschrift (§. 28. 2) seinen Nenner mit derselben multipliciren. Allein dadurch würde man zum Quotienten bis auf seltene Ausnahmen einen gemeinen, nicht, wie gefordert wird, einen Decimalbruch erhalten, mithin die Vorzüge der dekadischen Zahlform beim Rechnen mit diesen Zahlen, so oft nur eine Division vorkäme, fast immer wieder verloren geben.

Man ist also genöthigt, der anderen Regel für diesen Fall (§. 28. 1) zu folgen, nach welcher man in den Zähler des Dividends mit der ganzen Zahl dividirt, ohne den Nenner zu verändern, — abgesehen übrigens davon, ob diese Division aufgeht oder nicht. Der Zähler des Dividends ist aber eine ganze Zahl, welche aus dem gegebenen Dividend bloß durch Weglassen des Decimalkommas erhalten wird, indem man ihm den Nenner seiner letzten Ziffer ausdrücklich untersetzt oder denselben nur in Gedanken behält. Man dividirt daher, ohne das Komma des Dividends zu berücksichtigen, genau wie in ganzen Zahlen.

Geht die Division auf, so versieht man den als ganze Zahl gefundenen Quotienten wieder mit dem Nenner des Dividends, indem man eben so viele Bruchstellen, als dieser hatte, (nach vorgängiger Multiplication mit dem Nenner des Divisors, wenn es nöthig war) vom Ende der gefundenen Zahl abschneidet, etwa fehlende durch Nullen ergänzend.

Im vorigen Beispiele **3212, 072 : 604** ist **3212072 : 604 = 5318**, also nachdem drei Decimalstellen, wie im Dividend, abgeschnitten sind, **5, 318** der verlangte Quotient.

Geht die Division nicht auf, so behält man den Quotienten nur so weit bei, als er eine ganze Zahl wird, um damit nach der eben angezeigten Vorschrift zu verfahren. Der gemeine echte Bruch, welcher außerdem zum vollständigen Quotienten gehören würde, aus dem letzten Reste bei der Division, als Zähler, und dem Divisor, als Nenner, zusammengesetzt, muß dann freilich, um der Forderung zu genügen, daß das Resultat jeder Operation in Form der gegebenen Zahlen erscheinen soll, wie gar nicht vorhanden weggeworfen werden. Auch dieser Bruch müßte erst noch mit dem Nenner des Dividends dividirt werden, um als zweiter Theil in den gesuchten Quotienten zu gehören. Was also diesem abgeht, indem man jenen Bruch außer Acht läßt, beträgt keine ganze Einheit vom Range seiner niedrigsten Ziffer. Da nun der verkürzte Quotient immer bis zu demselben Range entwickelt wird, bis zu welchem der Dividend herabreichte, dieser aber unbeschadet seines Werthes durch Anhängen von Nullen zu so tiefen Bruchstellen fortgeführt werden kann, als man will; so hat man es völlig in seiner Gewalt, die Ungenauigkeit des Quotienten nach Belieben oder Bedürfniß bis zu jedem Grade zu vermindern, so daß wenigstens für die Praxis die Beibehaltung oder Wegwerfung des letzten Restes bei der Division keinen Unterschied mehr macht.

Um z. B. 9, 6523 durch 0, 74 zu dividiren, erhält man, nach vorläufiger Multiplication mit dem Nenner des Divisors, folgende Rechnung:

```
9 6 5, 2 3   | : 7 4
7 4          | = 1 3, 0 4
-----
2 2 5
2 2 2
-------
    3 2 3
    2 9 6
    -----
      2 7
```

In dem abgekürzten Quotienten 1 3, 0 4 ist das Komma bereits so gesetzt, wie es die Division mit dem Nenner des Dividends 1 0 0 verlangt. Der vollständige Quotient würde vor dieser Division $1304\frac{27}{74}$, also nachher $\frac{1304\,{}^{27}\!/_{74}}{100} = 13,04\frac{27}{7400}$ heißen. Der Fehler, welchen man begeht, indem man den letzten Rest der Division unterdrückt,

$$\frac{27}{7400} = \frac{{}^{27}\!/_{74}}{100} = \frac{27}{74}\cdot\frac{1}{100},$$

beträgt folglich kein $\frac{1}{100}$, oder keine Einheit vom niedrigsten Range des abgekürzten Quotienten.

Wollte man sich indessen mit diesem Grade von Genauigkeit nicht begnügen, so dürfte man nur den Dividend und die Rechnung bis zu den Einheiten desjenigen Ranges fortsetzen, unter welchem der Fehler bleiben soll. Um z. B. den vorigen Quotienten bis auf Milliontel zu entwickeln, rechnet man fort, wie folgt:

```
9 6 5, 2 3 0 0 0 0   | : 7 4
       -----         | = 1 3, 0 4 3 6 4 8
       2 7 0
       2 2 2
       -------
         4 8 0
         4 4 4
         -----
           3 6 0
           2 9 6
           -----
             6 4 0
             5 9 2
             -----
               4 8
```

Der Fehler, um wie viel der abgekürzte Quotient 13,043648 noch zu klein bleibt, ist nun $\frac{48/74}{1000000}$

$= \frac{48}{74000000}$, also kein Milliontel mehr.

Uebrigens deutet man die Unvollständigkeit eines Decimalbruchs durch dahinter gesetzte Punkte an, z. B. 13,04 ... oder 13,043648 ...

3. Die Stelle des Decimalkommas im Quotienten kann auch, wie man leicht sieht, gleich während der Rechnung bestimmt werden. Man setzt es nämlich hinter diejenige Ziffer, welche man erhält, wenn die Einerziffer des Dividends mit in Rechnung genommen ist. Dabei darf nur nicht vergessen werden, das Zeichen 0 an die Stelle der Einer zu schreiben, wenn bis dahin noch keine Einheit für den Quotienten gewonnen ist.

Ueberhaupt aber lässt sich das ganze Verfahren der bekannten Division in dekadisch gebildeten ganzen Zahlen dadurch noch näher bringen, daß man sich jeden zur Division vorliegenden Theil des Dividends als einen Inbegriff von Einheiten seiner niedrigsten Ordnung vorstellt. Da zuvor der Divisor immer zu einer ganzen Zahl gemacht ist, wenn er nicht schon als solche gegeben war, so behält der jedesmal erfolgende Theil des Quotienten den Rang desjenigen Stücks vom Dividend, aus welchem er hervorgeht; z. B.

```
15,400 | : 8
 8     | = 1,925
------
 74 (Zehntel)
 72
------
  20 (Hundertstel)
  16
------
   40 (Tausendstel)
   40
------
```

Beispiele, in welchen der Dividend größer oder kleiner ist, als der Divisor, — die Division aufgeht oder nicht, — nach beiden Methoden zu berechnen.

Welche Regel ließe sich für die Bestimmung des Kommas im Quotienten geben, wenn man den Divisor, so fern er Bruchstellen hat, nicht erst vorher zu einer ganzen Zahl machen wollte?

Beispiele aus der Zinsrechnung.

§. 39.

Verwandlung gemeiner in Decimalbrüche. — Periodische Decimalbrüche.

1. Die vorstehende Lösung der Divisionsaufgabe erledigt zugleich eine Frage, die für das Rechnen mit Decimalbrüchen von größter Wichtigkeit ist. So bequem nämlich der Gebrauch derselben bei wirklichen Rechnungen ist, so beschränkt würde er sein, wenn er davon abhinge, daß die der Rechnung unterzulegenden Zahlen auch alle in dieser Form gegeben wären. Es fragt sich also, ob nicht auch jeder andere gemeine Bruch in einen Decimalbruch umgeformt werden kann.

Jeder Bruch aber kann als Quotient einer Division des Zählers durch den Nenner angesehen werden. Setzt man also hinter den Zähler das Decimalkomma, hängt ihm die erforderlichen Nullen an und dividirt mit dem Nenner nach der vorigen Methode; so entwickelt sich der Werth des Bruchs oder Quotienten in Form eines Decimalbruchs;

z. B. $\frac{1}{2} = 1,\ 0 : 2 = 0,5$

$\frac{3}{8} = 3,000 : 8 = 0,375$ ꝛc.

2. Diese Division, wie überhaupt jede Division mit dekadisch gebildeten ganzen oder gebrochenen Zahlen, geht nun aber bei einer begrenzten Stellenzahl des Dividends keineswegs immer auf. Vielmehr lässt sich zeigen, daß sie meistens, auch noch so weit fortgesetzt, niemals aufgehen kann.

Denn das Anhängen einer Null an den Zähler (Dividend) behufs jeder ferneren Division bedeutet, abgesehen vom Decimalkomma, eine Multiplication mit 10, oder dem Producte der Primzahlen 2 und 5. Enthält also der Nenner (Divisor) außer solchen Factoren, welche auch im Zähler (Dividend) vorkommen und sich daher bei der Division freiwillig gegen einander aufheben, nur noch irgend einen anderen Primfactor als 2 und 5, so geht die Division durch denselben nicht auf, und wenn dem Zähler (Dividend) noch so viele Nullen angehängt würden (§. 15. 1).

Ein Bruch, der in seine kürzeste Form gebracht ist, kann daher nur dann vollständig in einen Decimalbruch verwandelt werden, wenn sein Nenner keine andere Primfactoren als 2 und 5 enthält, z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{40}$, $\frac{39}{50}$, $\frac{1}{125}$ u. a. Bei allen übrigen Brüchen, deren Nenner andere Primzahlen oder Producte derselben sind, muß man sich mit bloß genäherten Werthen begnügen; die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{25}{42}$, $\frac{8}{75}$ u. a. können z. B. nicht vollständig als Decimalbrüche ausgedrückt werden.

Man setze statt der Wörter Bruch, Zähler und Nenner die gleichbedeutenden Quotient, Dividend und Divisor, und die vorigen Bestimmungen gelten von der Division dekadischer Zahlen überhaupt.

Berechnung der vorigen oder anderer Beispiele.

Wie viele Stellen wird der Zähler eines solchen Decimalbruchs erhalten, der einen gegebenen gemeinen Bruch vollständig wiedergiebt?

Die Ausführung einiger Beispiele der zweiten Art, wo die Division des mit Nullen versehenen Zählers durch den Nenner niemals aufgehen kann, führt bald auf die Bemerkung, daß nach einer gewissen Anzahl theilweiser Divisionen dieselben Reste und dieselben Ziffern im Zähler des gewonnenen Decimalbruchs regelmäßig in derselben Ordnung wiederkehren. Man nennt solche Decimalbrüche **periodische**, und die Reihe der in gleicher Ordnung stets wiederkehrenden Ziffern des Zählers die **Periode** des Bruchs.

Um z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{9}{11}$ in Decimalbrüche zu verwandeln, erhält man folgende Rechnungen:

2, 0 0 0 . . .	: 3	9, 0000 . . .	: 11
1 8	= 0, 6 6 6 . . .	8 8	= 0, 8181 . . .
2 0		20	
1 8		11	
2 0		90	
1 8		88	
2		20	
		11	
		9	

und 6 ist die Periode des ersten, 81 die des zweiten Bruchs.

Man überzeugt sich leicht, daß die Entwickelung jedes Bruchs (oder Quotienten), der sich der Beschaffenheit seines Nenners (Divisors) wegen nicht vollständig als Decimalbruch ausdrücken lässt, nothwendig immer einen periodischen Decimalbruch geben muß. Denn da bei der Division künstlich gebildeter Zahlen alle einzelnen Reste, als Zahlen gleichen Ranges mit dem Divisor genommen, kleiner bleiben müssen als dieser; so kann es deren hier, wo der Divisor eine ganze Zahl ist, höchstens so viele von einander verschiedene geben, als die nächstkleinere ganze Zahl anzeigt. Wenn also nicht schon früher, so muß spätestens nach eben so vielen Divisionen, als der Divisor Einheiten zählt, einer der früheren Reste wiedererscheinen. Und werden nun bloß solche Reste berücksichtigt, zu welchen schon keine geltende Ziffern des Dividends mehr, sondern nur noch Nullen zugezogen wurden, so werden von dem ersten wiederkehrenden Reste an auch alle nachfolgenden in derselben Ordnung und mit dem einzigen Unterschiede sich erneuern, daß nun jeder um eine gleiche Stellenzahl erniedrigt ist. Es versteht sich von selbst, daß damit zugleich die regelmäßige Wiederkehr derselben Ziffern im Quotienten oder Zähler des verlangten Decimalbruchs bewiesen ist.

Brüche mit den Nennern 7, 17, 19, 23, 29 können als Beispiele dienen, in welchen die Perioden der daraus entwickelten Decimalbrüche die größtmögliche Menge von Ziffern erhalten.

Hebt die Periode des Decimalbruchs unmittelbar nach dem Komma an, so nennt man ihn einen reinen, im Gegentheil, wenn noch andere, nicht zur Periode gehörige Ziffern vor derselben im Zähler vorangehn, einen gemischten periodischen Decimalbruch.

Beispiele der letzteren Art liefert die Verwandlung der Brüche $\frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{4}{15}, \frac{13}{28}, \frac{1}{55}$ rc. in Decimalbrüche.*)

§. 40.

Die vier einfachen Rechnungsarten mit unvollständigen (genäherten) Decimalbrüchen.

Die Unmöglichkeit, in den meisten Fällen das Resultat der Division oder den Werth eines gemeinen Bruchs vollständig durch einen Decimalbruch auszudrücken, macht es unumgänglich nothwendig, wenn man anders nicht die Erweiterung der dekadischen Zahlform auf Brüche und die damit verknüpften Rechnungsvortheile aufgeben will, auch bloß genäherte Zahlen zur Größenbestimmung zuzulassen. Ja man darf behaupten, daß beim ernstlichen Gebrauch der Decimalbrüche selten eine Rechnung vorkommen möchte, die nicht entweder schon diese bloß genäherten Zahlwerthe anzunehmen gezwungen wäre, oder doch selbst auf solche hinführte. So lange man nun gewohnt ist, jede Zahl für streng richtig zu halten, und auch als Resultat jeder Rechnung wieder eine solche zu verlangen, kann man allerdings aus diesem Umstande ein Bedenken gegen die Brauchbarkeit der Decimalbrüche überhaupt hernehmen. Erwägt man aber, daß die meisten Zahlen, welche wir unseren Rechnungen zum Grunde legen, selbst nur der Wahrheit bis auf einen gewissen Grad nahe kommen, der sich nach der Natur des gemessenen Gegenstandes, der größeren oder geringeren

*) Ueber die Bedingungen, unter welchen die Umformung eines gemeinen Bruchs einen reinen oder gemischten periodischen Decimalbruch liefert, so wie ferner über die Bestimmung der Menge von Ziffern, welche im zweiten Falle der Periode vorausgehn, oder der Menge von Ziffern, welche die Perioden erhalten, wenn die Nenner der gegebenen Brüche aus verschiedenen Primzahlen außer 2 und 5 zusammengesetzt sind, mag der Lehrer so viel beibringen, als ihm nach Zeit und Umständen räthlich scheint.

Vollkommenheit der angewandten Meßapparate, der Schärfe unserer Sinneswerkzeuge u. dergl. m. richtet; so verschwindet jenes Bedenken, und es dringen sich die für die Praxis wichtigeren Fragen auf, wie aus solchen genäherten Zahlen, mit Vermeidung aller überflüssigen Rechnungen, selbst wieder möglichst genaue Resultate abzuleiten sind, bis wie weit man sich auf die Richtigkeit derselben verlassen könne, oder innerhalb welcher Grenzen sich die möglichen Fehler derselben halten müssen.

Die Beantwortung dieser Fragen ist durch frühere Bestimmungen über verkürztes Rechnen im dritten Abschnitt schon vorbereitet. Bei den nachfolgenden, welche sich jenen anschließen, setzen wir den gewöhnlichen Fall voraus, daß die gegebenen unvollständigen Decimalbrüche zu klein sind, aber um eine einzige Einheit ihrer niedrigsten Ordnung vermehrt, da nur Ziffern von noch geringerem Range ausgelassen sein sollen, schon zu groß ausfallen würden.

1. Bei der Addition müssen sämmtliche unvollständige Brüche bis zu derselben Ordnung entwickelt sein. Niedrigere Ziffern im einen als im anderen können als unnütz weggeworfen werden. Die Summe berechnet sich wieder auf eben so viele Bruchstellen, wie die Theile hatten, und ist jedenfalls zu klein, aber nicht um so viele Einheiten ihrer niedrigsten Ordnung, als verkürzte Theile in ihr liegen. Wird daher die letzte Ziffer als zu unsicher weggeworfen, so darf man behaupten, daß die nächsthöhere, wenn nicht mehr als zehn unvollständige Brüche addirt wurden, bei weiter fortgeführter Berechnung höchstens um eine Einheit hätte größer werden können. (S. §. 17. 2.) B.

2. Auch bei der Subtraction müssen die gegebenen Zahlen, wenn beide unvollständig sind, gleich weit entwickelt sein. Der Rest berechnet sich wieder auf eben so viele Bruchstellen. Ist eine der gegebenen Zahlen vollständig, und nur die andere abgebrochen, so kann der Rest nicht weiter entwickelt werden, als diese reicht. Er kann zu groß oder zu klein sein, je nachdem der unterdrückte Theil des Subtrahends oder des Minuends der größere gewesen wäre (S. §. 18. 2). Auf seine letzte Ziffer aber hat der Fehler, daß er zu klein genommen, keinen Einfluß, und nur wenn er zu

groß genommen ist, könnte der Fall eintreten, daß dieselbe bei weiter fortgehender Berechnung sich um eine Einheit verminderte.

B.

3. Bei der Multiplication sind die beiden Fälle zu unterscheiden, daß entweder nur der eine, oder daß beide Factoren als unvollständige Zahlen gegeben sind.

a) Ist nur der eine Factor eine genäherte Zahl, so nehme man den anderen (da es an sich gleichgültig ist, welchen von beiden) zum Multiplicator, multiplicire zuerst mit der höchsten Ziffer desselben den ganzen Multiplicand, und verfahre übrigens eben so, wie es für die verkürzte Multiplication in ganzen Zahlen (§. 19. 6) vorgeschrieben ist, wenn die Partialproducte in fallender Ordnung entwickelt werden sollen.

z. B.

```
         [5 2 3 6 4]
       57, 2 0 4 3 8 . . .
         × 4 6 3,2 5
    ---------------------
      2 2 8 8 1 7 5 2
        3 4 3 2 2 6 2
          1 7 1 6 1 3
            1 1 4 4 0
              2 8 6 0
    ---------------------
  = 2 6 4 9 9,9 2(7) . . .
```

Im verkürzten Producte werden natürlich nur so viele Bruchstellen abgeschnitten, als nach Abzug der Menge von Ziffern des Multiplicands, welche bei der Bildung des niedrigsten Partialproducts überschlagen sind, von der Gesammtzahl aller Bruchstellen n beiden Factoren noch übrig bleiben. — Wäre jene Zahl größer als diese, so hat man erst noch eine dem Ueberschuß gleiche Menge von Ziffern zum verkürzten Product hinzuzudenken, um an die Einerstelle zu gelangen.

Alle obigen Bestimmungen durch Beispiele zu erläutern.

Enthält der Multiplicator im Ganzen mehr Ziffern, als der Multiplicand, so schließt das vorgeschriebene Verfahren diejenigen, welche zu dem bestimmbaren Theile des Products keinen Beitrag mehr liefern können, von selbst aus; — dieß sind alle die letzten Ziffern, welche der Multiplicator mehr enthält als der Multiplicand, mit alleiniger Ausnahme der höchsten unter ihnen in den Fällen, wenn ihr Product mit der höchsten Ziffer des Multiplicands für sich, oder durch den Zuwachs aus der vorhergehenden Stelle eine zweiziffrige Zahl wird. B.

Um den Grad von Genauigkeit zu beurtheilen, den das gefundene Product hat, erwäge man, daß das höchste Partialproduct, wenn der Multiplicand weiter fortginge, höchstens um so viele Einheiten seines niedrigsten Ranges, als sein um 1 verminderter Multiplicator beträgt (3 im vorigen Beispiele), das nächstfolgende höchstens nur noch um eine Einheit eben dieses Ranges zunehmen könnte, alle folgenden aber bis zu ihrer letzten Ziffer richtig sind. Das ganze Product kann also in keinem Falle so viele Einheiten seiner niedrigsten Ordnung zu klein ausfallen, als die um die höchste Ziffer des Multiplicators vermehrte Anzahl in demselben vereinigter Partialproducte beträgt. (Im vorigen Beispiele würden 4 + 5 oder 9 Einheiten, zur Endziffer des Products 7 zugelegt, dasselbe jedenfalls zu groß machen). Läßt man daher die Endziffer des gefundenen Products (7) als zu unsicher weg, so darf man behaupten, daß die vorhergehende (2) nur in seltenen Fällen bei genauerer Berechnung mehr als eine Einheit größer werden könnte.

b) Sind beide Factoren unvollständige dekadische Zahlen, so schließt die verkürzte Multiplication alle überflüssigen Rechnungen nur dann aus, wenn beide mit gleich vielen Ziffern geschrieben sind. Enthält daher der eine etwa mehr als der andere, so bricht man ihn von oben her bei einer gleichen Ziffernmenge ab und nimmt von dem Product der nachfolgenden, um größerer Genauigkeit des Resultates willen, nur denjenigen Theil auf, welcher in den niedrigsten Rang der abgekürzten Partialproducte reicht. Man braucht zu dem Ende nur die beiden höchsten von den wegfallenden, und auch diese nur bei der Multiplication mit den beiden höchsten Ziffern des andern Factors zu berücksichtigen. Uebrigens bleibt das Verfahren der abgekürzten Multiplication und die Bestimmung der Stelle des Kommas im Product, wie im vorigen Falle; z. B.

```
       [8 5 1 2 0 4 9 3]
         5 0 7 9,4 8 3 6[6 6] . . . . .
     × 3 9,4 0 2 1 5 8 . . . .
     ----------------------------
       1 5 2 3 8 4 5 0 9
         4 5 7 1 5 3 5 2
           2 0 3 1 7 9 3
               1 0 1 5 8
                   5 0 7
                   2 5 3
                     4 0
     ----------------------------
   =   2 0 0 1 4 2,6 1(2) . . .
```

Das Product ist jedenfalls wieder zu klein. Um die Grenze zu bestimmen, innerhalb welcher der Fehler sich halten muß, nehmen wir an, beide Factoren wären gleich Anfangs mit derselben Anzahl von Ziffern geschrieben. Was alsdann der niedrigsten Stelle des abgekürzten Products durch Multiplication der höchsten Ziffer jedes Factors mit dem fehlenden Theile des andern noch zuwachsen könnte, muß jedenfalls eine Einheit kleiner bleiben, als eben diese Ziffer. Das Product der nächstniedrigeren Ziffer jedes Factors mit dem fehlenden Theile des anderen kann diesen Beitrag höchstens noch um eine Einheit erhöhen. Die unterdrückten Theile aller übrigen Partialproducte können unmittelbar nichts mehr zu dieser Stelle beitragen. Die Summe aller späteren Ziffern könnte in den niedrigsten beibehaltenen Rang höchstens so viele Einheiten abgeben, als verkürzte Partialproducte in demselben endigen, (da die nächste Verticalreihe eine Ziffer mehr enthalten kann). Ueberhaupt also würde das Product bei genauerer Berechnung höchstens um so viele Einheiten seiner niedrigsten Ordnung vergrößert werden können, als die Summe der höchsten Ziffern seiner Factoren und der Zahl in ihm vereinigter abgekürzter Partialproducte beträgt (5 + 3 + 7 oder 15 im vorigen Beispiele). Die letzte Ziffer als gar zu wenig bestimmt weggeworfen, beträgt demnach die Unsicherheit der vorletzten Ziffer in seltenen Fällen mehr als eine oder zwei Einheiten, um welche sie zu klein sein kann.

Die obigen Bestimmungen an Beispielen zu erläutern.

4. Bei der Division kann bloß der Dividend, oder nur der Divisor, oder beide können unvollständige Zahlen sein.

Zuerst wird jederzeit wieder das Komma ans Ende des Divisors und im Dividend um eben so viele Stellen heruntergerückt. Hat dieser, als abgekürzte Zahl, nicht die erforderliche Menge von Bruchziffern, so bemerkt man die fehlenden durch eigene Zeichen, z. B. Sternchen (**). Um alsdann, mit Vermeidung aller unnützen Rechnungen, den Quotienten so genau als möglich zu finden, führt man die Rechnung nur so lange vollständig, als Dividend und Divisor, jener für die Theile, von welchen abgezogen werden soll, dieser für die abzuziehenden Partialproducte, bis zur niedrigsten erforderlichen Ordnung bestimmbare Ziffern hergeben, und setzt sie als verkürzte Division (nach den §. 20. 2 gegebenen Vorschriften) fort, sobald die Grenze der bestimmbaren Ziffern im Dividend oder den Vielfachen des Divisors erreicht ist. Wenn daher nur eine der gegebenen Zahlen unvollständig ist, so hängt es von ihr ab, bei welcher Stelle die verkürzte Rechnung anhebt. Sind Dividend und Divisor beide bloß genäherte Zahlen, so werden von dem einen nicht mehr Ziffern beibehalten als vom andern, wenn das mit gleich vielen Ziffern abgebrochene Stück des Dividends, abgesehn vom Decimalkomma, größer ist als der Divisor, — sonst vom Dividend noch eine Ziffer mehr. Der letzte einziffrige Rest wird als unzureichend zur Bestimmung des Quotienten weggeworfen.

Die Stelle des Kommas im Quotienten wird am leichtesten gleich während der Rechnung bestimmt (§. 38. 3); nur ist dabei zu beachten, wenn die verkürzte Rechnung nicht bis zur Einerziffer des Dividends herabgeht, daß das Abschneiden einer Stelle vom Divisor mit dem Fortrücken um eine Stelle im Dividend übereinkommt.

Für einige Fälle (deren hier ziemlich viele unterschieden werden könnten) ist die Rechnung aus folgenden Beispielen zu ersehen.

1) 29,61542…	: 4,713
oder 29615,42…	: 4[7[1[3
28278	= 6,28377..
13374	
9426	
39482	
37704	
1778	
1413	
365	
329	
36	
32	

2) 82,5	: 0,502173…
od. 825000[00,0]	:5[0[2[1[7[3..
502173	= 164,286…
322827	
301303	
21524	
20086	
1438	
1004	
434	
401	
33	
30	

3) 0,005684…	: 2,7104…
oder 56,84…	: 2 7104
oder 5,684 …	: 27[1[0,[4]
5 420	= 0,002097…
264	
244*)	
20	
18	

4) 229,25…	: 7,3825
od. 22925**,*…	: 73825
od. 22925*,*…	:7[3[8[2,[5]
22147	= 31,05…
778	
738	
40	
37	

Die Quotienten, welche nach den bisher gegebenen Vorschriften berechnet sind, können zu groß sein. Wie viel möglicher Weise, lässt sich beurtheilen, wenn man von dem letzten Theile des Dividends, welcher zur Bestimmung der niedrigsten Ziffer des Quotienten gedient hat, erst so viele Einheiten, als bisher verkürzte Producte vom Dividend weggenommen sind, und im Fall der Di-

*) Wenn, wie hier, die nächstfolgende weggelassene Ziffer 9 (auch wohl 8) ist, so erlaubt man sich wohl, dafür eine volle Einheit nächsthöherer Ordnung zu setzen.

visor eine bloß genäherte Zahl war und in das höchste Product vollständig bis zu seiner niedrigsten bekannten Ziffer aufgenommen wurde, auch noch die höchste Ziffer des Quotienten abzieht, und den Rest statt des vorigen Theils in Rechnung nimmt. In anderen Voraussetzungen wird man hiernach die zulässigen Abänderungen in der Bestimmung der Fehlergrenze leicht selbst finden. Oft wird diese nicht einmal eine, selten mehr als eine Einheit von der niedrigsten Ordnung des Quotienten betragen. —

Im ersten der vorigen Beispiele würde man

	34	statt	36,	
im zweiten	27	„	33,	
im dritten	19	„	20	(oder 21)
und im vierten	38	„	40	

zur letzten Division zu nehmen haben, um die Genauigkeit des Quotienten zu prüfen, und nur im zweiten eine Verminderung des Quotienten um eine Einheit (5 statt der Endziffer 6) erhalten.

Beispiele mit den nöthigen Erläuterungen, den vorstehenden Bestimmungen gemäß.

Anhang. Verwandlung periodischer Decimalbrüche in gemeine.

Wenn die genäherten Decimalbrüche, mit denen man rechnen soll, lauter periodische, und ihre Perioden bekannt wären, so ließe sichs wohl möglich denken, die Regeln der vier Grundoperationen mit ihnen so zu entwickeln, daß auch in den Resultaten wieder eine regelmäßige Wiederkehr der Ziffern hervorträte. Es fehlte dann nur noch, daß man den Werth jedes periodischen Decimalbruchs auch vollständig abgeschlossen durch einen gemeinen Bruch wiederzugeben vermöchte, um durch das Rechnen mit bloß genäherten Zahlen zu Resultaten von strenger Richtigkeit zu gelangen. Der gemeinen Praxis bringen Untersuchungen, welche auf Bestimmungen der Art abzielen und in allgemeinerer Form den Gegenstand höherer Theile der Wissenschaft ausmachen, keinen wesentlichen Vortheil. Als merkwürdiges Beispiel ähnlicher Methoden mag aber das Verfahren, periodische Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln, hier noch Platz finden.

Vollständige Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln, hat man nur nöthig, dem Zähler seinen Nenner ausdrücklich unterzusetzen; z. B. $0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$.

Die Verwandlung periodischer Decimalbrüche erfordert einen Kunstgriff, durch welchen die unendliche Reihe ihrer Ziffern aufgehoben wird.

Bei reinen periodischen Brüchen nimmt man eine ganze Periode vor das Komma, also ein so großes Vielfaches des gegebenen Bruchs, als der zu einer Periode gehörige Nenner anzeigt, und zieht davon den einfachen Bruch selbst ab. Dadurch wird die unendliche Ziffernreihe nach dem Komma vollständig aufgehoben, indem die davon abzuziehende, gleichfalls unendliche Ziffernreihe Theil für Theil mit ihr übereinstimmt. Der Rest ist die Periode als ganze Zahl. Er enthält den gegebenen Bruch einmal weniger, als die höhere Einheit, welche der Periode als Nenner angehörte, mithin eben so oft, als eine Zahl anzeigt, die mit so viel Neunen (9) geschrieben wird, als die Periode Ziffern hat. Ein eben so vielter Theil des Restes ist also der gesuchte Bruch. Es sei z. B. der gegebene Bruch

$$\begin{array}{rcl} 0,272727\ldots & = & b, \text{ so ist} \\ 27,2727\ldots & = & 100\,b \\ -\ 0,2727\ldots & = & -\ b \\ \hline 27 & = & 99\,b \end{array}$$

und $\frac{27}{99} = b$.

Daher die Regel: **um einen reinen periodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, nehme man die Ziffern einer Periode zum Zähler, und eine mit eben so vielen Neunen geschriebene Zahl zum Nenner desselben.**

B.

Bei gemischten periodischen Decimalbrüchen ändert sich das Verfahren folgendermaßen. Man rückt das Komma im gegebenen Bruche einmal bis hinter die Endziffer, und ein zweites Mal bis vor die Anfangsziffer der ersten Periode, oder was dasselbe ist, man multiplicirt den Bruch zu zwei verschiedenen Malen mit höheren dekadischen Einheiten, deren eine so viele Nullen enthält, als Decimalstellen bis zum Schlusse, die andere so viele, als Decimalstellen bis zum Anfange der ersten Periode gezählt werden.

In beiden Vielfachen des anfänglichen Bruchs folgen nun auf das Komma bloß Periodenziffern in derselben Ordnung. Zieht man daher das zweite vom ersten ab, so verschwinden die Bruchziffern, und als Rest bleibt eine abgeschlossene ganze Zahl, welche den gegebenen Bruch so viel mal enthält, als das erste Vielfache das zweite übertrifft. Die Division jenes Restes durch die Zahl, welche diesen Ueberschuß anzeigt, giebt folglich den gesuchten Werth des gegebenen Bruchs.

Es sei z. B. der gegebene Bruch $0,62387387\ldots = b$,

$$\begin{array}{lrcr} \text{also} & 62387,387387\ldots & = & 100000\,b \\ & -\ \ 62,387387\ldots & = & -\ \ 100\,b \\ \hline & 62325 & = & 99900\,b \end{array}$$

$$\text{und} \qquad \frac{62325}{99900} = b.$$

Die allgemeine Regel ist leicht aus diesem Beispiele zu entnehmen. Um einen gemischten periodischen Decimalbruch durch einen gemeinen Bruch (vollständig) auszudrücken, subtrahire man den nicht zur Periode gehörigen Theil seines Zählers von demjenigen, welcher bis zum Schlusse der ersten Periode herabgeht, — beide als ganze Zahlen gedacht, — mache den Rest zum Zähler, und eine Zahl, welche so viele Neunen als die Periode Ziffern, und dahinter so viele Nullen als der nicht periodische Theil des Zählers Ziffern enthält, zum Nenner des gesuchten Bruchs. B

Sechster Abschnitt.

Die vier einfachen Rechnungsarten mit positiven und negativen Zahlen.

---

§. 41.

Begriff einander entgegengesetzter oder widerstreitender und einstimmiger Grössen. — Positive und negative Grössen und Zahlen.

1. Die Lehre von den vier arithmetischen Grundoperationen würde in den vorhergehenden Abschnitten vollständig geschlossen sein, wenn nicht durch die Einführung der Buchstaben als allgemeiner Größenzeichen noch eine Frage veranlasst würde, deren Erörterung absichtlich bis hierher verschoben worden ist. Buchstaben sollen als Stellvertreter des Begriffs Zahl jeder beliebigen Deutung fähig sein. Insofern nun bloß die Form der Zahl, — ob sie ganz oder gebrochen, einfach oder aus Theilen oder Factoren zusammengesetzt ist u. dergl. — in Betracht kommen soll, ist es freilich unbedingt zulässig, statt der Buchstaben in allen Verbindungen, in welche sie durch die vier einfachen Rechnungsarten gebracht werden können, irgend welche besondere Zahlwerthe zu setzen. Denn für jeden Fall, der hier angenommen werden möchte, ist im Vorigen eine bestimmte Rechnungsregel entwickelt. Es fragt sich aber, ob den Buchstaben in allen jenen Verhältnissen auch hinsichtlich der Größe jeder beliebige Zahlwerth zugestanden werden darf.

Nun ist aber klar, daß bei der Addition, Multiplication und Division jede der gegebenen Zahlen so groß oder so klein angenommen werden kann, als man will; die verlangte Rechnung ($a + b$, $a \,.\, b$ und $a:b$) ist immer möglich und nach bestimmten Vorschriften ins Werk zu richten. Nur bei der Subtraction tritt ein anderer Fall ein. Sobald eine Zahl von einer anderen abgezogen werden soll ($a - b$), muß immer stillschweigend vorausgesetzt werden, daß jene kleiner sei als diese ($b < a$). — Gleichwohl würde der Zweck, um deßwillen die Buchstaben bei der Bezeichnung arithmetischer Verhältnisse eingeführt sind, Allgemeinheit des Ausdrucks, durchaus vereitelt werden, wenn die Gültigkeit einer Formel, so oft sie eine Subtraction verlangte, an die Erfüllung jener Bedingung wirklich geknüpft werden müsste.

Aber ist denn, könnte man fragen, eine so unbegrenzte Allgemeinheit, die selbst an die natürliche Schranke einer Operation nicht einmal gebunden sein will, in der That Bedürfniß der Wissenschaft? Kann es denn nur einen vernünftigen Sinn haben, eine größere Zahl von einer kleineren abziehn zu sollen? Oder ist nicht vielmehr, sobald dieser Fall eintritt, die Forderung und mit ihr die ganze Rechnung, aus welcher sie entspringt, als ungereimt zu verwerfen? — Am besten wird auf diese Fragen mit einigen Beispielen geantwortet werden.

Römische Schriftsteller bestimmen die Zeit eines Ereignisses durch die Angabe, wie viele Jahre vor oder nach Erbauung der Stadt Rom es sich zutrug, welche wir in das Jahr 754 vor Chr. G. setzen. Die Vertreibung der Könige fiel in das J. 244 nach Erb. Roms: um diese Angabe in unsere Zeitrechnung zu übertragen, zieht man 244 von 754 ab, $754 - 244$, und erhält das Jahr 510 vor Chr. G. Nach diesem und ähnlichen Beispielen ließe sich die Regel bilden: um eine Jahreszahl römischer Zeitrechnung r in eine Angabe unserer christlichen Zeitrechnung c umzusetzen, muß jene Zahl von 754 abgezogen werden; kürzer: $c = 754 - r$. Nun soll einmal das Todesjahr Nero's, 822 nach Erb. R., in unsere Zeitrechnung übertragen werden. Jetzt ist $r = 822$, mithin größer als 754, und der Forderung nach unserer Formel nicht mehr zu genügen. Aber die Aufgabe ist ganz vernünftig und lässt eine ganz bestimmte Lösung zu. Man zieht nämlich jetzt 754 von 822 ab, und der Rest 68 zählt Jahre nach Chr. G. Für die Fälle, wo $r > 754$ wird, hätte man also die neue Formel $c = r - 754$ nöthig, mit der Bestimmung, daß die Resultate, welche sie giebt, nicht mehr wie früher Jahre vor, sondern nach Chr. G. bedeuten. — Und um alle möglichen Fälle zu umfassen, bedürfte man sogar noch der dritten Formel $c = 754 + r$, für die Voraussetzung nämlich, daß r Jahre vor Erb. R. anzeigen soll.

Auf Thermometerscalen zählt man von einem gewissen (physikalisch bestimmten) Puncte an aufwärts Grade der Wärme, abwärts Grade der Kälte. Nach Reaumür wird derselbe Raum in 80 gleiche Theile eingetheilt, den Fahrenheit in 180 zerlegt; also gehen 9 Fahrenheitische Grade auf 4 Reaumürische, oder 1^0 F $= \frac{4}{9}^0$ R. Nun aber fängt Fahrenheit seine Zählung 32 seiner Grade tiefer an als Reaumür. Soll daher z. B. die Angabe 50^0 F Wärme in die entsprechende nach R. verwandelt werden, so zieht man von ihr erst 32 ab $(50 - 32)$, und multiplicirt den Rest (18) mit $\frac{4}{9}$; also ist $50^0 F = 8^0 R$. Ueberhaupt unter f die Fahrenheitische, unter r die Reaumürsche Angabe verstanden, würde sich die vorige Rechnung durch folgende Formel darstellen lassen: $r = \frac{4}{9}(f - 32)$. Diese würde aber, so weit unsere bisherige Bezeichnung reicht, nur auf die Fälle passen, wo $f > 32$ oder $f = 32$ ist und Grade der Wärme anzeigt. Sobald $f < 32$ wird, ändert sich die Regel dahin ab, daß man nun f von 32 abzuziehn, und das Product des Restes mit $\frac{4}{9}$ nicht mehr wie früher als Grade der Wärme, sondern als Grade der Kälte anzusehen hat. — Sollen auch unter f schon Grade der Kälte gemeint sein, so muß die Zahl 32 zu f addirt, und nachdem die Summe mit $\frac{4}{9}$ multiplicirt ist, das Ergebniß ebenfalls wieder als Angabe von Kältegraden genommen werden.

Stellt a den Betrag eines Vermögens, b den Betrag davon zu leistender Ausgaben vor, so berechnet sich der reine Vermögensbestand nach der Formel $a - b$. Ist das abzuziehende $b > a$, so kehrt man die Rechnung um und nennt den Ueberschuß Schulden.

Ein Seefahrer steuert nach Westen und bemerkt in seinem Tagebuche, wie viele Meilen er jeden Tag in dieser Richtung vorgerückt ist. Die Summe aller dieser Zahlen a bestimmt seine westliche Entfernung vom Ausgangspuncte. Ist er nun auch einmal östlich, wir wollen allgemein setzen um b Meilen, zurückverschlagen, so wird jene Entfernung durch a — b angegeben. Gesetzt nun, die Zahl von Meilen, welche er nach und nach oder auf einmal östlich gesegelt ist, überträfe diejenige, welche sein Fortrücken gegen Westen anzeigt, $b > a$, so entspränge aus jener Formel wiederum die Forderung, eine größere Zahl von einer kleineren abzuziehn. Statt dessen kehrt man die Rechnung um, subtrahirt a von b und deutet den Rest b — a als Meilen östlicher Entfernung vom Ausgangspuncte.

Die vorstehenden Beispiele beweisen hinlänglich, daß die Forderung, eine größere Zahl von einer kleineren zu subtrahiren, oft genug vorkommen würde, wenn man Formeln, welche eine Subtraction vorschreiben (a — b) und innerhalb gewisser Grenzen richtig befunden sind, unbedingt für alle möglichen Fälle gelten lassen wollte, — ohne daß gleichwohl die Aufgaben, aus welchen diese Forderung entspringt, etwas an sich Unmögliches verlangten. In allen vorigen Fällen wenigstens — und der ähnlichen ließen sich noch viele finden — wurden solche Aufgaben leicht und sachgemäß gelöst. Denn das Unstatthafte der Forderung lag nicht sowohl in der Sache, als vielmehr in der Form, der sich die Rechnung fügen sollte. Man kehre nur — so würde die gemeine Vorschrift lauten — gleich den Ansatz der Rechnung in dem Sinne um, den das Resultat annehmen muß, und das Hinderniß ist gehoben. Allein damit weicht man der anfänglichen Aufgabe nur aus, anstatt sie zu lösen. Die Gültigkeit der Formel a — b bleibt doch bloß auf solche Fälle beschränkt, in welchen $a > b$ angenommen wird, und andere Voraussetzungen erfordern wieder eine andere Formel. Der Wissenschaft jedoch, welche gerade nach höchster Verallgemeinerung der Form strebt, kann dieß Verfahren nicht genügen. Anstatt die Form besonderen Fällen, muß sie diese vielmehr jener anzupassen suchen. Anstatt also die Vorschrift a — b, wenn $b > a$ wird, aufzugeben, versuche man, ihr auch solche Fälle noch unterzuordnen. Und wenn dazu die bisherige Vorstellungsweise und Bezeichnung nicht ausreichen, so gebe man diesen die nöthigen

Erweiterungen und Ergänzungen. — Wenden wir uns in dieser Absicht noch einmal zu den vorigen Beispielen zurück.

Wenn nun im ersten Beispiele die Formel $c = 754 - r$ auch in der Voraussetzung, daß $r > 754$, z. B. $r = 822$ ist, beibehalten werden sollte, so könnte man die vorgeschriebene Subtraction im gewöhnlichen Sinne anfangen, unbekümmert darum, ob sie sich auch in derselben Art zu Ende bringen lässt. Man würde also vom Minuend 754, welcher Jahre vor Chr. G. zählt, Jahr für Jahr zurückzählen und damit fortfahren sollen, bis alle Einheiten des Subtrahends an die Reihe gekommen sind. Allein nachdem man bis zum Anfangspunct der Zählung, 0 (dem Zeitpunct der Geburt Christi), zurückgekommen ist, bleiben noch Einheiten des Subtrahends übrig? — Nichts hindert jedoch, auch diese in demselben Sinne wie die vorigen rückwärts zu zählen, indem man nun auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspunctes in einer Zahlenreihe fortschreitet, welche Jahre nach Chr. G. zählt. So erreicht man im vorigen Beispiele das J. 68 nach Chr. G. Nun ist der Sinn der anfänglichen Aufgabe und der vorgeschriebenen Rechnung nicht geändert; aber in der neuen Zahl, dem Reste, ist der Sinn der anfänglichen Zählung, durch welche der Minuend entstand, gerade umgekehrt. Minuend und Rest zählen dieselbe Einheit (Jahr), aber in entgegengesetzter Beziehung, jener Jahre vor, dieser Jahre nach Chr. G.*)

Im zweiten Beispiele galt die Formel $r = \frac{4}{9}(f - 32)$ eigentlich nur für die Voraussetzung, daß f eine Angabe von Wärmegraden, und nicht kleiner als 32 war. Der Abzug von 32° sollte zunächst dazu dienen, die Fahrenheitische Angabe auf den Reaumürschen Anfangspunct der Zählung zurückzuführen. Der Rest $f - 32$ zählt Fahrenheitische Grade auf Reaumürscher Scale, und zwar in der obigen Voraussetzung Grade über dem Anfangs-

*) Wie auch die dritte Voraussetzung, wenn r Jahre vor Erbauung Roms bedeuten soll, vermöge der nachher erklärten, ausdrucksvolleren Bezeichnung unter die Formel $c = 754 - r$ gebracht werden kann, mag der Schüler später selbst erläutern.

puncte der Zählung, 0^0, oder Grade der Wärme. Wollte man inzwischen der Formel auch dann noch folgen, wenn f zwar noch Fahrenheitische Wärmegrade zählt, aber kleiner als 32, z. B. wenn $f = 5$ ist; so könnte man ebenfalls wieder im Sinne der vorgeschriebenen Subtraction anfangen, von f, hier 5, an rückwärts zu zählen. Allein nachdem die 5 Einheiten des Minuends aufgehoben sind, ist der Subtrahend noch nicht erschöpft. Man zähle nun auch die übrigen noch in demselben Sinne weiter und kommt so unter den Anfangspunct der Reaumürschen Scale in eine neue Zahlenreihe, welche sogenannte Grade der Kälte zählt. Im vorigen Beispiele gelangt man so bis zum 27sten Grade unter dem Nullpuncte. Die Multiplication dieser Zahl mit $\frac{4}{9}$ hat nur den Zweck, die bis jetzt gezählten Fahrenheitischen Grade auch der Größe nach auf Reaumürsche zurückzuführen. Das Product $\frac{4}{9} \cdot 27 = 12$ zählt nun Reaumürsche Grade, aber unterhalb des Null- oder Gefrierpunctes, mithin im entgegengesetzten Sinne, als die gegebene Zahl f (oder das Product $\frac{4}{9} \cdot f$). Grade **über** und **unter** dem Gefrierpuncte, oder Grade der **Wärme** und der **Kälte** sind gleichartige Größen (Raumtheile der Thermometerscale), aber in **umgekehrter Beziehung** auf den Anfangspunct der Zählung gedacht.

Wenn in der Formel $a - b$ unter a ein einzunehmendes, unter b ein zu verausgabendes Geldquantum verstanden werden soll, so kann der Forderung $a - b$ auch dann noch genügt werden, wenn $b > a$ wird, sobald man den Ueberschuß des b über a in demselben Sinne, wie das dem a gleiche Stück, rückwärts zählt und bemerkt, daß derselbe jenseits des Anfangspunctes in umgekehrter Beziehung wie a genommen sei. Man thut dieß schon im gemeinen Leben, indem man den Rest **Schulden** (Ausgabe) nennt, während der Minuend a **Vermögen** (Einnahme, Guthaben, Besitz) hieß.

Im letzten Beispiele endlich, wo a ein westliches, b ein östliches Fortrücken bedeuten sollte, lässt sich ebenfalls der Rest $a - b$, auch wenn $b > a$ ist, der Vorschrift gemäß, durch Rückwärtszählen des b von a finden, wenn man nur das über den Anfangspunct von a hinaus Gezählte als einen dem a entgegengerichteten, mithin östlichen, Fortschritt auslegt.

Ueberhaupt also lässt sich in diesen, und so in ähnlichen Fällen der Forderung, eine größere Zahl von einer kleineren zu subtrahiren, ganz im Sinne der vorgeschriebenen Rechnungsart genugthun, wenn man die Vorstellung zu Hülfe nimmt, daß ein dem anfänglichen entgegengerichtetes Zählen, sobald es den Anfangspunct der ersten Zählung überschreitet, zur Bestimmung von Größen führt, welche, in umgekehrter Beziehung wie die anfänglichen gedacht, diesen entgegengesetzt werden. So sind Form und Bedeutung der ersten Vorschrift gerettet, und ihr entsprechend; anstatt sie umzukehren, lässt man nur das Resultat in den entgegengesetzten Sinn wie bei der anfänglichen Zählung übergehen. So erhielt man, wenn der Subtrahend größer wurde als der Minuend, im ersten Beispiele nicht, wie die Formel voraussetzte, Jahre vor, sondern Jahre nach Chr. G., im zweiten statt Grade der Wärme Grade der Kälte, im dritten statt Vermögen Schulden, im vierten statt westlicher östliche Entfernung.

2. Was in diesen und ähnlichen Beispielen, mit besonderer Beziehung auf die Eigenthümlichkeit der behandelten Größen, durch je zwei einander gegenübergestellte Benennungen ausgedrückt werden soll, muß sich die Wissenschaft unter allgemeinen Begriffen und mit entsprechender Allgemeinheit der Bezeichnung aneignen.

Offenbar soll aber durch jene, einander entgegengesetzte Benennungen keine Verschiedenheit der inneren oder wesentlichen Merkmale, also keine Ungleichartigkeit der dadurch unterschiedenen Größen angezeigt werden. Denn Jahre vor und Jahre nach Chr. G. sind als Jahre, Grade über und Grade unter dem Gefrierpuncte als Thermometergrade, Vermögen und Schulden als Geldwerthe, westliche und östliche Entfernung als Entfernungen vollkommen gleichartige Größen, und Zahlen, welche zu ihrer Bestimmung dienen, behalten dieselbe Einheit (Jahr, Grad, Thaler, Meile rc.). Es bilden sich also keineswegs ungleich benannte Zahlen in dem gewöhnlichen Sinne, wo die Verschiedenheit der Namen auch einen wesentlichen Unterschied der Einheiten an sich bezeichnet. Vielmehr betrifft der Gegensatz, wie er in den obigen und ähnlichen Fällen angedeutet werden soll, nur ein Verhältniß, eine Beziehung übrigens gleichartiger Größen, nämlich die Art und Weise, wie dieselben auf eine gemeinschaftliche Grenze, ihren Anfang, und dadurch auf einander bezogen werden.

Solche gleichartige Größen nun, welche, auf denselben Anfang bezogen, in entgegengesetztem Sinne gedacht werden, mithin in dem Verhältnisse zu einander stehen, daß durch Umkehrung der Beziehungen aus der Vorstellung der einen die Vorstellung der anderen erzeugt wird, sollen einander (entgegengesetzt oder) widerstreitend heißen.

Wenn im Gegentheil gleichartige Größen auch in gleicher Beziehung auf ihren Anfang oder in demselben Sinne gedacht werden, so sollen sie einstimmig heißen.

3. Als Merkmale, an welchen die Verhältnisse des Widerstreits oder der Einstimmigkeit erkannt werden können, knüpfen sich an die eben aufgestellten Begriffe folgende. — Wenn zwei einander widerstreitende Größen sich vereinigen, so heben sie, sofern sie übrigens gleich sind, einander völlig, und wenn sie ungleich sind, theilweise auf, so daß die kleinere und ein gleiches Stück der größeren sich gegenseitig vernichten. Einstimmige Größen dagegen treten bei der Vereinigung zu einem größeren Ganzen zusammen, in welchem sie als Theile neben einander fortbestehen.

4. Um aber den Unterschied, welchen das Verhältniß des Widerstreits unter gleichartigen Größen stiftet, festhalten zu können, nennt man jederzeit diejenige von ihnen, welche zuerst, in dem ursprünglichen Sinne, gesetzt wird, positiv, diejenige aber, welche jener ersten entgegengesetzt wird oder widerstreitet, negativ.

5. Das Wort negativ ist daher nicht mit verneinend zu verwechseln, so wenig Widerstreit eine bloße Verneinung ist. Durch Verneinung wird nur etwas zuerst Gesetztes schlechthin aufgehoben, durch den Widerstreit hingegen ein Zweites, das Um-

gekehrte des Ersten, dafür an die Stelle gesetzt. Es ist daher für den Widerstreit, die mathematische Entgegensetzung der Größen, charakteristisch, daß es allemal zwischen den einander entgegengesetzten Dingen noch ein drittes giebt, welches weder das eine noch das andere ist.

Nachweisung dieser Behauptung an den obigen Beispielen.

6. Auch muß man nicht in den Namen positiv und negativ die Andeutung von Eigenschaften finden wollen, welche den Dingen an und für sich zukämen; so wenig als man die früheren Benennungen: Jahre vor und Jahre nach Chr. G., Grade über und unter dem Gefrierpuncte, Reichsthaler Vermögen und Schulden, Meilen westlicher und östlicher Entfernung u. dergl. — Benennungen, welche mit besonderer Rücksicht auf einzelne Arten von Größen dasselbe sagen sollten, wie die allgemeinen Ausdrücke positiv und negativ, — als Bezeichnung wesentlicher Unterschiede auslegen durfte. Eine Größe ist an sich weder positiv noch negativ, sondern dieses oder jenes nur erst in Beziehung auf die andere. Beide Wörter dienen nur zum Ausdruck eines Verhältnisses, und dieses Verhältniß (des Widerstreits) ist ein wechselseitiges (reciprokes), wie es schon der Ausdruck, zwei Größen sind »einander« entgegengesetzt oder widerstreitend, anzeigt: das Negative ist dem Positiven, und umgekehrt dieses jenem entgegengesetzt. Von zwei einander widerstreitenden Größen darf daher eben so gut die eine wie die andere positiv genannt werden; die Entscheidung hängt lediglich davon ab, welche von beiden der Bestimmung des Verhältnisses zum Grunde gelegt werden soll. Die andere, deren Vorstellung mittelbarer Weise, eben durch den Begriff des Widerstreits, aus der Vorstellung jener ersten erzeugt wird, muß dann negativ heißen. Wer z. B. beim Abschluß seines Rechnungswesens mit dem Guthaben oder Vermögen anfinge, würde dieses positiv, die Schulden negativ, wer umgekehrt mit den Schulden anfinge, würde diese positiv, das Vermögen negativ nennen.

Uebrigens ist von selbst klar, daß eben so wohl zwei gleichartige negative als zwei gleichartige positive Größen unter sich einstimmig sind.

7. Die Beziehungen des Widerstreits und der Einstimmigkeit unter Größen müssen natürlich auch auf die Zahlen übergehen, welche jenen zum Ausdruck dienen.

Man könnte schlechtweg auch die Zahlen, jenachdem sie einstimmige oder widerstreitende, positive oder negative Größen bezeichnen, selbst einstimmig oder widerstreitend, positiv oder negativ nennen. Allein diese Erklärung reicht für die Zwecke der Arithmetik nicht aus. — Nicht alle Arten von Größen, welche sich durch Zahlen darstellen lassen, sind auch fähig, in entgegengesetzter Beziehung gedacht zu werden. Eine Menge von Bäumen, Thieren, Menschen und anderen Dingen, welche von Natur unstetig sind, im entgegengesetzten Sinne nehmen zu sollen, hat gar keinen Sinn. Die reine (abstracte) Arithmetik soll aber Gesetze und Regeln der Zahlenverknüpfung allgemein, ohne Rücksicht auf einzelne Anwendungen, nur für unbenannte Zahlen entwickeln. Um daher ihren Lehren die erforderliche Allgemeinheit zu sichern, räumt man der unbestimmten Einheit, aus welcher die Zahlen sich bilden, unbedingt die Fähigkeit ein, auch in umgekehrter Beziehung gedacht zu werden, und bestimmt die vorigen Begriffe selbstständiger, wie folgt.

Zahlen, welche in demselben Sinne (derselben Beziehung oder Richtung) gezählt sind, sollen einstimmige, solche dagegen, welche in entgegengesetztem Sinne (entgegengesetzter Beziehung oder Richtung) gezählt sind, widerstreitende,

diejenigen, welche die Einheit im ersten, ursprünglichen Sinne zu setzen vorschreiben, positive, solche dagegen, welche das Umgekehrte, Widerstreitende der ursprünglichen Einheit, oder diese im umgekehrten Sinne, ihren übrigen Bestimmungen gemäß, zu setzen fordern, negative heißen.

Nun dienen freilich auch nach dieser Erklärung noch einstimmige, widerstreitende, positive und negative Zahlen zum Ausdruck einstimmiger, widerstreitender, positiver und negativer Größen und treten in die nämlichen Verhältnisse zu einander wie diese (S. Nro. 3).

Es kann sich aber auch ereignen, daß die Rechnung, den Gesetzen der reinen (abstracten) Arithmetik folgend, aus den Bedingungen einer Aufgabe eine negative Zahl als Werth des Gesuchten, mithin die Forderung herausstellt, dieses in dem dem ursprünglichen widerstreitenden Sinne zu denken, die Natur des Gegenstandes aber, dessen Größe durch jene Zahl bestimmt werden soll, diese Umkehrung des anfänglichen Sinnes schlechterdings verbietet. Alsdann ist freilich das Resultat ungereimt; allein das Widersinnige rührt nicht von der Rechnung, sondern von der Aufgabe selbst her, welche, wenn gleich versteckt und unentwickelt, eine Bedingung eingeführt haben muß, welcher sich die Natur der zu bestimmenden Größe geradezu widersetzt. Die Arithmetik behauptet gleichwohl ihr Recht auf Allgemeinheit und giebt auch in solchen Fällen noch, wo die Verwirklichung unmöglich ist, den Werth an, welchen das Gesuchte erhalten müßte, wenn es den Bedingungen der Aufgabe genügen sollte.

8. Den Zeichen positiver Zahlen (Ziffern oder Buchstaben) setzt man, um jene Beziehung auch beim Schreiben anzudeuten, das Zeichen der Addition (+), oder im Anfange eines Ansatzes und sonst, wenn davon keine Mißverständnisse zu befürchten sind, gar kein Zeichen, den Zeichen negativer Zahlen aber jederzeit das Zeichen der Subtraction (—) vor.

9. Die Wahl dieser Zeichen rührt offenbar von der Entstehung des Begriffs negativer Größen und Zahlen her. Die erste Veranlassung dazu gab der Fall bei der Subtraction, wenn der Subtrahend größer wird als der Minuend. Das überschüssige Stück des Subtrahends ist alsdann im entgegengesetzten Sinne wie der Minuend zu zählen, folglich negativ, wenn dieser, als die zuerst gegebene Zahl, positiv genannt wird. Sofern aber noch eine andere Zahl als vorhanden gedacht würde, von welcher jenes Stück weggenommen werden könnte, würde man dieses als subtractiv, also auch mit dem Zeichen — angesetzt haben (Vergl. §. 9. 9).

Ueberhaupt fließen die Begriffe **subtractiv** und **negativ** in einander über: jener fordert nur (als Aufgabe), was dieser als schon geschehen (als Beziehung) annimmt, nämlich einen dem früheren entgegengerichteten (umgekehrten) Act des Zählens. Man kann daher die Forderung, eine Zahl von einer anderen zu subtrahiren (ab- oder zurückzuzählen), auch als Beziehung des Widerstreits zwischen jener und dieser auffassen, — wie schon die Bezeichnung beider Vorstellungsarten dieselbe ist, — und was dann im ersten Sinne, die Zahlen ohne Beziehung, bloß als Größenangaben gedacht, als **Subtraction** erscheint, ist in der zweiten Vorstellungsart eine **Vereinigung** oder **Addition** widerstreitender Zahlen.

10. Bisher wurde überall durch Zahlen nur die Größe der Dinge ausgedrückt, abgesehn von den Beziehungen, in welche dieselben als einstimmig oder widerstreitend zu einander gesetzt werden können. Jene Beziehungen entschieden nur über die Wahl der Rechnungsart und des Rechnungszeichens, wenn die Zahlen in Verbindung treten sollten. Die Zahlen selbst wurden durchaus ohne alle Nebenbestimmung, in welchem Sinne sie genommen werden sollten, d. h. als **absolute** Zahlen gedacht. Und wollte man ihnen noch nachträglich eine solche Bestimmung beifügen, so müßte man sie insgesammt, als im ursprünglichen Sinne genommen, positiv nennen.

Nachdem aber eben durch die Zahlenverknüpfung und namentlich bei der Subtraction, wenn die arithmetische Darstellung von Größenverhältnissen die erforderliche Allgemeinheit erreichen soll, die Nothwendigkeit sich ergeben hat, auf die Möglichkeit einer zweifachen Art der Zählung, in entgegengesetztem Sinne, Rücksicht zu nehmen, und danach positive und negative Zahlen zu unterscheiden; so bedürfen auch die früheren Rechnungsregeln, in Gemäßheit dieser Unterscheidung, noch Ergänzungen, welche theils die Art und Weise der Verbindung, theils die Bestimmung des Vorzeichens, welches dem Resultate zu geben ist, zum Gegenstande haben. Dieß ist die Aufgabe der nachfolgenden Paragraphen.

Zum Unterschiede von dem gemeinen Rechnen mit absoluten Zahlen nennt man das mit positiven und negativen Zahlen das **algebraische**. Durch dasselbe wird die arithmetische Darstellung von Größenverhältnissen zugleich allgemeiner, umfassender und bedeutsamer.

Die Begriffe des Widerstreits und der Einstimmigkeit sind auch noch an anderen Beispielen, wo möglich ihrer Entstehung gemäß, zu entwickeln. Das Zusammenwirken von Kräften nach derselben oder entgegengesetzten Richtungen (wie Gewichte an den Enden eines gleicharmigen Wagebalkens denselben Arm entweder gemeinschaftlich nach unten, oder das eine nach unten, das andere nach oben, ziehen), Drehungen von einer bestimmten Richtung aus nach derselben oder nach entgegengesetzten Seiten, Auf- und Niedersteigen auf den Stufen einer Treppe von dem mittleren Stockwerke eines Gebäudes aus können als passende Beispiele dazu benutzt werden.

Besonderer Nachdruck ist bei diesen Erörterungen darauf zu legen,

daß einstimmige und widerstreitende Größen an sich gleichartig sind,

daß die Beiwörter positiv und negativ, oder Bezeichnungen, welche die Stelle derselben vertreten, keine Eigenschaft, sondern nur eine Beziehung der Größen anzeigen,

daß von zwei einander widerstreitenden Größen keine ein Vorrecht hat, positiv zu heißen,

und daß negativ nicht dasselbe bedeutet wie verneinend.

Wie müßten die positiven und negativen ganzen Zahlen in eine Reihe zusammengestellt werden, um ein Bild der von ihnen bezeichneten Größen zu geben? — und womit ist die Grenze zwischen beiden Zahlenreihen zu bezeichnen?

Weßhalb ist die Behauptung ungereimt, positive Zahlen seien größer, negative kleiner als Nichts? — und woher kann dieser Irrthum entsprungen sein?

§. 42.

Die Addition.

1. Bei der Addition sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder die zu vereinigenden Zahlen sind einstimmig, oder einander widerstreitend.

a) Einstimmige Zahlen, sie mögen beide positiv oder beide negativ sein, werden, ihrem Begriffe gemäß (§. 41. 7), durch wirkliches Hinzuzählen der einen zur anderen auf die gewöhnliche Weise vereinigt. Die Summe enthält sie als neben einander bestehende Theile und bekommt, als einstimmig mit ihnen, wieder dasselbe Vorzeichen.

z. B. $(+5) + (+3) = +(5+3) = +8,$
$(-5) + (-3) = -(5+3) = -8;$

allgemein: $(+a) + (+b) = +(a+b),$
$(-a) + (-b) = -(a+b).$

Anmerk. Im Ansatze der Aufgabe sollen hier und in der Folge die mit den Zahlen zusammen eingeschlossenen, in der Auflösung die vor den Klammern stehenden Zeichen als Vorzeichen positiv und negativ bedeuten, während zuerst das zwischengesetzte, und in der Auflösung das mit in die Klammern eingeschlossene Zeichen als Rechnungszeichen im gewöhnlichen Sinne zu lesen ist.

b) Einander widerstreitende Zahlen müssen, der Bestimmung ihres Begriffs zufolge (§. 41. 7), als Zahlen, welche in entgegengesetztem Sinne gezählt sind, bei der Vereinigung einander ganz oder theilweise vernichten, — je ein Theil der einen einen gleich großen Theil der anderen.

An Größe gleich, heben eine positive und negative Zahl bei der Addition sich gegenseitig auf, und die (algebraische) Summe ist 0; an Größe verschieden, werden sie dadurch addirt (vereinigt), daß man die kleinere von der größeren abzählt und den übrig bleibenden Theil, als herrührend von der letzteren, in gleichem Sinne und mit demselben Vorzeichen wie diese ansetzt;

z. B. $(+5) + (-5) = 0;$

allgemein: $(+a) + (-a) = 0;$

$(+5) + (-2) = +(5-2) = +3,$
$(-5) + (+2) = -(5-2) = -3;$

allgemein, wenn $a > b$ ist:

$(+a) + (-b) = +(a-b)$ und
$(-a) + (+b) = -(a-b).$

2. Auch in dem zweiten Falle noch bleibt das Wesen der Addition, als Vereinigung gleichartiger Zahlen (§. 8), unverändert, trotz dem, daß die Art und Weise ihrer Ausführung der Addition absoluter Zahlen gänzlich zuwider läuft: und ihr Ergebniß darf wie früher Ganzes oder Summe genannt werden, obgleich man die ge-

wohnte Vorstellung, als müsse diese die zu addirenden Zahlen als Bestandtheile (partes integrantes) in sich enthalten, aufgeben und dabei stehen bleiben muß, daß sie durch Vereinigung derselben als erzeugender Theile (partes efficientes) entstanden ist. Soll der Unterschied ausdrücklich hervorgehoben werden, so nennt man die letztere eine algebraische Summe.

3. Um die Häufung der Zeichen zu vermeiden, pflegt man, wenn die zu addirenden Zahlen mit eigenen Vorzeichen versehen sind; das Zeichen der Addition als Andeutung ihrer Verbindung wegzulassen, und schreibt also die vorigen Formeln kürzer:

$$\begin{aligned}
&+ a + b = + (a + b),\\
&- a - b = - (a + b),\\
&+ a - a = 0\\
&+ a - b = + (a - b),\\
&- a + b = - (a - b).
\end{aligned}$$

Erläuterung der obigen Regeln an Beispielen, in welchen den Zeichen + und — besondere Bedeutungen (z. B. Gewinn und Verlust beim Spiel) gegeben werden, und die hier geforderte Rechnung auch nach dem gemeinen Sprachgebrauch eine Vereinigung (z. B. der Cassen zweier Spieler) genannt wird.

Zusammengesetztere Beispiele, wie

$$\begin{array}{rrrrrrr}
a & +\ 5b & -\ 3c & -\ mp & -\ z & & \\
-\ 8a & +\ 7b & -\ 9c & +\ 3mp & -\ \tfrac{3}{8}r & & \\
-\ 2a & -\ 14b & +\ c & -\ 1{,}4\ mp & & +\ x & \\
+\ 11a & +\ 5b & +\ 11c & +\ 0{,}8\ mp & -\ \tfrac{1}{2}r & -\ x & +\ 1 \\
 & -\ b & & -\ 0{,}03mp & +\ 6r & -\ m & \\
\hline
= ? & & & & & &
\end{array}$$

§. 43.

Die Subtraction.

1. Wie die Addition widerstreitender Zahlen von der gewohnten Bildungsweise der Summe absoluter Zahlen abweicht, so lässt sich voraussehen, daß auch die Subtraction mit positiven und negativen Zahlen nicht immer, wie bei absoluten Zahlen, auf ein bloßes Abzählen oder Wegnehmen der einen von der anderen zurückkommen wird. Allein der Begriff der Operation muß derselbe bleiben, wenn gleich die ihr zu unterwerfenden Zahlen Gestalt und Beziehung ändern.

Der Minuend, — er heiße M, gleichviel, ob positive oder negative Zahl, — soll demnach (§. 9.) als Summe zweier Theile angesehen werden, welche nun je nach ihren Beziehungen zu einander den Bestimmungen des vorigen §. gemäß vereinigt sind: der eine dieser Theile ist gegeben, der Subtrahend, — entweder als positive oder negative Zahl, was durch $\mp S$ andedeutet werden mag,— und die Aufgabe, den zweiten Theil, den Rest oder die Differenz, — er heiße unbestimmt R, — wiederzufinden. Also die Voraussetzung: $M = (\mp S) + R$, und

die Aufgabe: $M - (\mp S) = R$?

Um aber aus einem Ganzen M, wenn der eine Theil $\mp S$ gegeben ist, den anderen Theil R wiederzufinden, müsste man jenen in der Summe oder dem Ganzen aufheben. Jede Zahl wird aber (§. 42. 1, b) dadurch aufgehoben, daß man dieselbe Zahl, nur im entgegengesetzten Sinne genommen, mit ihr vereinigt: $(+ S) + (- S)$ oder $(- S) + (+ S)$, in zusammengezogener Bezeichnung $(\mp S) + (\pm S) = 0$. Wird also zum Minuend, als der Summe von Subtrahend und Rest, das Entgegengesetzte des Subtrahends addirt; so wird dieser vernichtet, und der andere Theil, der gesuchte Rest, bleibt allein übrig. In Zeichen:

$$\begin{array}{lll} M & = (\mp S) + R, & \\ \text{addirt } (\pm S) & = (\pm S), & \\ \hline \text{ist } M + (\pm S) = & & R = M - (\mp S) \end{array}$$

Daher die Regel: **wenn Minuend und Subtrahend positive oder negative Zahlen sind, so nehme man den Subtrahend in entgegengesetztem Sinne oder mit umgekehrtem Zeichen, und addire ihn so zum Minuend** (nach den Vorschriften des vorigen §.); die gefundene Zahl ist der Rest.

Hinsichtlich der Vorzeichen und der Größe der gegebenen Zahlen, sofern auch die letztere Einfluß auf die Rechnung hat, lassen sich bei der Anwendung dieser Regel acht Fälle unterscheiden. In den nachfolgenden Beispielen und der allgemeinen Darstellung derselben soll die Berechnung des Restes in der Art, wie es die Regel verlangt, d. h. zuerst durch Verwandlung der Subtractions- in eine Additions-Aufgabe, und dann durch vorschriftsmäßige Lösung der letzteren, vermittelst der oben (§. 42. 1, Anmerk.) erklärten Bezeichnung angedeutet werden.

1. $(+9) - (+5) = (+9) + (-5) = +(9-5) = +4$
2. $(+9) - (+9) = (+9) + (-9) = 0$
3. $(+5) - (+9) = (+5) + (-9) = -(9-5) = -4$
4. $(-9) - (-5) = (-9) + (+5) = -(9-5) = -4$
5. $(-9) - (-9) = (-9) + (+9) = 0$
6. $(-5) - (-9) = (-5) + (+9) = +(9-5) = +4$
7. $(+9) - (-5) = (+9) + (+5) = +(9+5) = +14$
8. $(-9) - (+5) = (-9) + (-5) = -(9+5) = -14$;

allgemein, wenn $a > b$ angenommen wird:

1. $(+a) - (+b) = (+a) + (-b) = +(a-b)$
2. $(+a) - (+a) = (+a) + (-a) = 0$
3. $(+b) - (+a) = (+b) + (-a) = -(a-b)$
4. $(-a) - (-b) = (-a) + (+b) = -(a-b)$
5. $(-a) - (-a) = (-a) + (+a) = 0$
6. $(-b) - (-a) = (-b) + (+a) = +(a-b)$
7. $(+a) - (-b) = (+a) + (+b) = +(a+b)$
8. $(-a) - (+b) = (-a) + (-b) = -(a+b)$.

Nach welchen Voraussetzungen sind diese acht Fälle unterschieden?

Die Richtigkeit der gefundenen Reste ist durch die sogenannte Probe zu bestätigen.

Wäre man, um die Regel der Subtraction zu entdecken, von der Untersuchung dieser einzelnen Fälle ausgegangen, so würde man zuerst die in der dritten Columne stehenden Auflösungen, aus diesen, wenn man sie als Resultate der Addition angesehen hätte, die Ausdrücke der vorhergehenden Columne und dadurch die Regel erhalten haben.

So würde z. B. in der 6ten Aufgabe, $(-b) - (-a)$, folgende Ueberlegung zur Bestimmung des Restes geführt haben. Der negative Minuend b soll aus dem gleichfalls negativen, aber größeren Subtrahend a durch Hinzukommen eines zweiten Theils entstanden sein. Dieser kann nicht einstimmig mit dem Subtrahend, also nicht negativ gewesen sein, weil er sonst bei der Addition nur zur Vergrößerung desselben beigetragen haben würde. Er soll vielmehr ein Stück desselben aufgehoben haben, muß ihm also entgegengesetzt, d. h. positiv, und so groß gewesen sein, wie dieses aufgehobene Stück. Dessen Größe aber findet sich durch gemeine Subtraction des Minuends vom Subtrahend. Beide Bestimmungen zusammengenommen, ist daher der gesuchte zweite Theil oder Rest $= +(a - b)$, und wenn man diesen Ausdruck als Resultat einer Addition ansehen will, $= + a - b$, oder $- b + (+a)$, wie oben.

In der 7ten Aufgabe $(+a) - (-b)$ wird vorausgesetzt, daß durch Zulegen einer Zahl zu dem negativen Subtrahend $(-b)$ eine positive Summe, der Minuend $(+a)$, entstanden sei. Die gesuchte Zahl muß also dem Subtrahend widerstreitend (oder einstimmig mit dem Minuend) und so groß gewesen sein, daß nach Aufhebung des Subtrahends durch ihren einen Theil der Minuend als zweiter Theil noch übrig bleiben konnte. Der Rest ist folglich positiv und so groß wie die Summe des Minuends und Subtrahends, als absoluter Zahlen genommen; in Zeichen: $+(a + b)$, oder aufgelöst in eine Additionsaufgabe: $(+a) + (+b)$, wie oben.

Auf entsprechende Art ist auch in den übrigen Fällen aus dem Begriffe der Subtraction und den Regeln der algebraischen Addition zu folgern, welches Vorzeichen in jeder besonderen Voraussetzung dem Reste gebührt, und wie sich die Größe desselben berechnet. Das Resultat in eine Additionsaufgabe auflösend, muß man immer die allgemeine Regel der Subtraction bestätigt finden. Man gebrauche übrigens nach Belieben bei diesen Erörterungen Zahlenbeispiele oder die allgemeinen Buchstabenausdrücke.

B., wie das nachstehende:

$$\begin{array}{l} \quad 4c + 11{,}38m - 7\tfrac{5}{16}r - 0{,}42mr - x + 262abc + z \\ \underline{-(7c - 4{,}07m - \tfrac{13}{24}r + 19{,}8mr - 3\tfrac{1}{2}x + 218abc + z - 4)} \\ = ? \end{array}$$

2. Die Berechnung des Restes nach den vorhergehenden Bestimmungen, wenn Minuend und Subtrahend als positive und negative Zahlen gegeben sind, weicht freilich von der gemeinen Subtraction, welche nur den Größenunterschied absoluter Zahlen finden lehrt, in mehr als einer Hinsicht ab und kommt in gewissen Fällen auf die gerade entgegengesetzte Rechnungsart, eine Addition der gegebenen Zahlen, zurück. Gleichwohl hat sich der Begriff der Subtraction auch in dieser erweiterten Anwendung auf positive und negative Zahlen nicht geändert; vielmehr ist aus ihm die allgemeine

Regel ihrer Ausführung hervorgegangen, und auf gleiche Weise, wie es in zwei Fällen geschehen ist, kann aus demselben, mit gehöriger Berücksichtigung der zwischen Minuend und Subtrahend stattfindenden Beziehungen auch die Regel für jede andere besondere Voraussetzung abgeleitet werden. Ja man nehme nur die Subtraction in der Bedeutung, welche ihr schon der gemeine Sprachgebrauch giebt, als die Aufgabe, **den Unterschied zweier Zahlen zu finden**, lege den Beiwörtern positiv und negativ bestimmte, auf ein Beispiel bezogene Namen und Bedeutungen bei, und man wird in den Resultaten genau die obige Regel wieder hervortreten sehen, sobald man die Forderung hinzufügt, daß die Zahl, welche den Unterschied anzeigt, zugleich die Nebenbestimmung erhalten solle, in welchem Sinne sie zu nehmen sei, um von der zweiten Zahl, dem Subtrahend, zur ersten, dem Minuend, zu gelangen.

Gesetzt z. B., zwei Personen **A** und **B** spielen auf gemeinschaftliche Kosten, der Gewinn werde durch positive, der Verlust durch negative Zahlen angedeutet, man wisse, was Beide zusammen, oder im Ganzen, und was der Eine, **A**, allein gewonnen oder verloren habe, so ist die Aufgabe, den Unterschied zwischen beiden Angaben, mithin den Gewinn oder Verlust des Zweiten, **B**, zu finden, auch im gemeinsten Verstande eine Subtractionsaufgabe, und die Auflösung in die angegebene Bezeichnung übertragen, wird in jeder Voraussetzung auf die allgemeine Regel zurückführen.

Oder man verstehe unter positiven Zahlen Jahre vor, unter negativen Jahre nach einem bestimmten Zeitpuncte, — unter jenen Grade der Wärme, unter diesen Grade der Kälte, — unter jenen aufwärts, unter diesen abwärts gezählte Stufen einer Treppe ꝛc. und suche unter allen möglichen Verhältnissen, in welche je zwei Zahlen gleicher Art zu einander gesetzt werden können, den Unterschied derselben so zu bestimmen, daß dabei zugleich bemerkt wird, in welchem Sinne er gezählt werden müsse, um von der zweiten Zahl zur ersten zu gelangen: die allgemeine Regel wird in jedem Falle der Art wieder ihre Bestätigung finden.

Abgesehn von jeder besonderen Bedeutung der Vorzeichen, läßt sich die Lösung der Aufgabe, den Unterschied zweier Zahlen zu finden, und zugleich die Richtung anzugeben, in welcher die Differenz zu zählen ist, um vom Subtrahend zum Minuend überzugehen, auch an der schon früher (§. 41.) verlangten Zusammenstellung der niedrigsten positiven und negativen ganzen Zahlen in eine stetige Reihe anschaulich machen.

Im Sinne des einen oder anderen (hier genannten oder selbstgewählten) Beispiels oder auch an der zuletzt genannten Zahlenreihe ist die Berechnung des Restes oder der Differenz unter allen früher unterschiedenen (acht) Voraussetzungen ausführlich zu erklären und zu begründen.

§. 44.

Die Multiplication.

1. Wenn zur Multiplication positive und negative statt absoluter Zahlen gegeben werden, so kann die Bildung des Products, was die Größe betrifft, durch die Angabe, in welchem Sinne die Factoren gezählt sind, in keiner Weise geändert werden, und nur das Vorzeichen des Products oder die Beziehung, in welcher es selbst je nach den angegebenen Beziehungen seiner Factoren zu nehmen ist, erfordert noch eine eigene Bestimmung.

Auch in dieser Hinsicht hat der Multiplicator als Vorschrift oder Norm für die Bildung einer neuen Zahl, der sich der Multiplicand als Stoff zur Erzeugung derselben unterordnen soll, die größte Wichtigkeit, so zu sagen, die entscheidende Stimme. Als positive Zahl zeigt er an, daß man die Einheit im ersten, ursprünglichen Sinne gesetzt, und mit ihr die angegebene Wiederholung, Eintheilung oder Beides zugleich vorgenommen habe. An die Stelle dieser Einheit soll der Multiplicand treten. Dieser muß also gleichfalls unverändert, in dem Sinne wie er gegeben ist, gesetzt, und so in gewohnter Art auch den übrigen Vorschriften des Multiplicators unterworfen werden. Das Product wird folglich, wenn der Multiplicator positiv ist, einstimmig mit dem Multiplicand, — positiv oder negativ, jenachdem dieser es ist.

$$(+a) \,.\, (+b) = +\, ab,$$
$$(-a) \,.\, (+b) = -\, ab.$$

Ist dagegen der Multiplicator eine negative Zahl, so fordert er, daß man das Umgekehrte der ursprünglichen Einheit, oder diese im entgegengesetzten Sinne, seinen übrigen Bestimmungen gemäß, setze. Soll daher, was der Multiplicator als unbestimmte Einheit annimmt, durch den Multiplicand vertreten werden, so hat man auch von ihm das Umgekehrte, oder ihn selbst in Widerstreit mit seiner anfänglichen Beziehung zu setzen, und in dem erhaltenen Sinne der vom Multiplicator vorgezeichneten Rechnung zu unterziehen. Das Product wird folglich in diesem Falle dem Multiplicand entgegengesetzt, — negativ, wenn dieser positiv, positiv, wenn er negativ war.

$$(+a) \,.\, (-b) = -\, ab,$$
$$(-a) \,.\, (-b) = +\, ab.$$

Alle vier Fälle, die hier in Absicht auf die Vorzeichen der Factoren möglich sind, lassen sich auch unter die Regel bringen: einstimmige Factoren geben ein positives, widerstreitende ein negatives Product.

Ableitung dieser Regel an Zahlenbeispielen, wobei man sich der Ausdrücke bedienen darf: Etwas (+4) mal (positiv 4 mal) nehmen, heißt, das Gegebene selbst 4 mal nehmen; Etwas (—4) mal (negativ 4 mal) nehmen, heißt, das Entgegengesetzte, Widerstreitende des Gegebenen 4 mal nehmen.

Den Vorzeichen + und — des Multiplicands können auch besondere Bedeutungen (z. B. östlicher, westlicher Fortschritt) untergelegt, und dieselben Zeichen beim Multiplicator als entsprechende Beziehungen (vorwärts, rückwärts) gedeutet werden.

Beseitigung des Einwurfs, daß aus der vorigen Regel folge, wenn Schulden mit Schulden multiplicirt würden, sei das Product Vermögen (S. §. 10. 2).

B., wie folgendes:

$$\left(-\,5{,}3\,a + 60\,ab - \frac{d}{5\,f}\right) \,.\, \left(6\,ab + 0{,}53\,a - \frac{0{,}75\,d}{4\,f}\right)$$

Welchen Einfluß hat die Multiplication mit — 1 auf den anderen, zumal einen mehrtheiligen Factor?

Welche Regel läßt sich aus der vorigen ableiten, um das Vorzeichen eines Products aus mehr als zwei Factoren zu bestimmen?

2. Würde der eine Factor als absolute Zahl angenommen, und auch die Möglichkeit, ihn in umgekehrter Beziehung zu denken, nicht zugestanden, so dürfte man ihn nur als Multiplicator annehmen, und das Product würde einstimmig mit dem anderen Factor, dem Multiplicand, gerade so, als wäre der Multiplicator eine positive Zahl.

$$(+a) \,.\, b = +\, ab,$$
$$(-a) \,.\, b = -\, ab.$$

Weßhalb?

§. 45.

Die Division.

Wie die Bildung des Products bei der Multiplication, was die Größe betrifft, von den Beziehungen oder Vorzeichen der Factoren unabhängig ist, so kann in derselben Hinsicht auch die Wiederauflösung des Products durch Division oder die Berechnung des Quotienten durch die Angabe, daß Dividend und Divisor positive oder negative Zahlen sind, keine Aenderung erfahren. Die Regel, nach welcher in jedem Falle die Beziehung oder das Vorzeichen des Quotienten zu bestimmen ist, ergiebt sich durch bloße Umkehrung aus der vorigen.

Ist der Dividend positiv, so müssen die beiden Factoren, aus denen er sich erzeugt haben soll, einstimmig gewesen sein. Der Quotient ist folglich in demselben Sinne und mit demselben Vorzeichen anzusetzen, wie der Divisor.

$$(+ab) : (+b) = +a,$$
$$(+ab) : (-b) = -a.$$

Ist hingegen der Dividend negativ, so müssen die beiden Factoren, als deren Product er anzusehen ist, einander widerstreitend gewesen sein. Der Quotient muß daher im entgegengesetzten Sinne und mit entgegengesetztem Vorzeichen wie der Divisor genommen werden.

$$(-ab) : (+b) = -a,$$
$$(-ab) : (-b) = +a.$$

Die Regel kann auch, ähnlich wie bei der Multiplication, so gefaßt werden: **der Quotient wird positiv, wenn Dividend und Divisor einstimmige, negativ, wenn diese einander widerstreitende Zahlen sind.**

Wie würde die Regel lauten, wenn man die Aufgabe der Division (mit positiven und negativen Zahlen) oder den Quotienten gleich in Bruchform ansetzte, wie $\frac{+a}{+b}$, $\frac{+a}{-b}$ rc.?

Weßhalb ist $\frac{a+b-c}{d+f-e} = \frac{-a-b+c}{-d-f+e}$?

Wodurch unterscheiden sich die Quotienten $\frac{aa-bb}{a-b}$ und $\frac{aa-bb}{b-a}$ (in der angegebenen und der entwickelten Gestalt) von einander?

B. mit einfachen und zusammengesetzten Zahlen, wie $-\frac{25ab}{36c}$: $\frac{10am}{21bcr}$; $\left(0,3rr - 0,1rx - \frac{rz}{2} - \frac{xx}{8} + \frac{5xz}{12}\right) : \left(-0,3r + \frac{x}{4}\right)$ u. a.

Welche Veränderung bringt die Division mit — 1 im Dividend, zumal einem mehrtheiligen, hervor?*)

2. Wird der Divisor als absolute Zahl angenommen und für unfähig erklärt, beziehungsweise, als positive oder negative Zahl gedacht zu werden, so gestattet die Division nur den Sinn, in welchem er als Multiplicator bei der Bildung des Products mitgewirkt haben soll (§. 11. 3, b), und der Quotient wird einstimmig mit dem Dividend, gerade so, als wäre der Divisor eine positive Zahl.

$$(+ab) : b = + a,$$
$$(- ab) : b = - a.$$

Weßhalb? (S. §. 44. 2)

Weßhalb geschieht des Falles keine Erwähnung, daß der Dividend eine absolute, der Divisor eine positive oder negative Zahl sei?

§. 46.

Auslegung der Zeichen + und — als Rechnungszeichen oder Vorzeichen.

Vergleicht man die Regeln dieses Abschnitts mit denen, welche früher (zuerst im zweiten, und in ihrer Anwendung auf Brüche im vierten Abschnitte) für das Rechnen mit mehrgliedrigen Zahlen entwickelt wurden, so zeigt sich unter ihnen in Ansehung ihres Ausdrucks durch Zeichen eine bemerkenswerthe Uebereinstimmung. Man nehme die Zeichen + und — zwischen den Gliedern eines Ausdrucks in ihrer ersten Bedeutung als Rechnungszeichen (der Addition und Subtraction), oder in der zweiten Bedeutung als Vorzeichen, jedes zu dem nachfolgenden Gliede gezogen, um anzugeben, in welchem Sinne dasselbe zu nehmen ist (ob positiv oder negativ); so wird man dieselben Formeln, welche den Entwickelungsgang zusammengesetzter Rechnungen in der ersten Annahme vorzeichnen sollten, auch in der zweiten gültig finden.

*) Nicht ohne Interesse ist die Ableitung des sonderbaren Schlusses, daß negative Zahlen, obgleich kleiner als Nichts, doch größer als das Unendliche seien, und zwar um so mehr sich darüber erheben, je kleiner sie an sich werden. Hat es der Lehrer für angemessen gehalten, den Schülern diese Schlußreihe und das Widersinnige ihrer Voraussetzungen und der daraus abgeleiteten Behauptungen zu erläutern, so haben diese den ganzen Ideengang und die Beurtheilung desselben zu wiederholen.

Sofern bloß die schriftliche Darstellung der Rechnung berücksichtigt, und eine bloß mechanische Regel für das richtige Setzen der Zeichen + und — gefordert würde, ließe sich der hierauf bezügliche Theil früherer Sätze und Regeln folgendermaßen ausdrücken.

Das Zeichen +, in welcher Bedeutung es auch genommen werden mag, vor einem in Klammern eingeschlossenen, mehrgliedrigen Ausdrucke, bewirkt, wenn die Klammern wegfallen, keine Aenderung,

das Zeichen — dagegen in gleichem Falle eine Umkehrung aller Zeichen, welche innerhalb der Klammern den Gliedern vorgesetzt waren, wobei nur vor dem ersten Gliede, wenn es kein eigenes Zeichen hat, (nach §. 41. 8) das Zeichen + zu ergänzen ist.

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d, \text{ und}$$
$$a - (b + c - d) = a - b - c + d;$$

(S. §. 9. 6, 7, 8 und 10; §. 42. 3 und §. 43.)

bei der Multiplication mehrgliedriger Factoren erhält das Product,

und bei der Division mit mehrgliedrigen Zahlen der Quotient aus je zwei gleich bezeichneten Gliedern das Zeichen + (oder kein Zeichen), aus je zwei ungleich bezeichneten Gliedern das Zeichen —:

$$(a + b - c) \cdot (d + e - f)$$
$$= ad + bd - cd + ae + be - ce - af - bf + cf$$
$$\text{und } (ad + bd - cd + ae + be - ce - af - bf + cf) :$$
$$(a + b - c) = d + e - f.$$

(S. §. 10, 7, und §. 44; §. 11. 8 u. 9 und §. 45.)

Da überdieß die Verbindung der Glieder einer Formel, wenn statt der Buchstaben bestimmte Zahlen gesetzt werden, in gleicher Art und Weise geschieht, man mag die Zeichen + und — als Rechnungszeichen oder als Vorzeichen nehmen, so erscheint dadurch die Beibehaltung des Additions- und Subtractionszeichens, um damit zugleich anzudeuten, ob eine Zahl positiv oder negativ sei, vollends gerechtfertigt.

Demnach darf den Zeichen + und — zwischen den Gliedern einer Formel nach Belieben die eine oder die andere Bedeutung untergelegt werden.

Nur in dem Falle, wenn ein Glied für sich, außer Verbindung mit anderen, ein eigenes Zeichen vor sich hat, muß dieses als Vorzeichen oder als die Andeutung genommen werden, daß der Ausdruck positiv oder negativ sei. Das Zeichen $+$ kann aber in solchen Fällen eben so gut auch wegbleiben.

Desgleichen, wenn in einem Ausdrucke von der Form $a - b$ der Subtrahend größer wird als der Minuend, $b > a$, muß entweder der Unterschied beider Zahlen, wenn man dem Zeichen $-$ die Bedeutung als Subtractionszeichen vorbehalten will, als negativ, oder es kann auch mit Verwechslung der Bedeutung dieses Zeichens gleich die Aufgabe als Addition widerstreitender Zahlen angesehen werden. (Vergl. §. 41. 9 und §. 42.)

Derselbe Fall, welcher die Entstehung des Begriffs positiver und negativer Zahlen veranlaßte (§. 41.), wenn nämlich einem für sich bestehenden Gliede ohne Verbindnng mit anderen das Zeichen $-$ vorzusetzen wäre, ist also auch der einzige, wo eine bestimmte, und zwar nur die eine Auslegung möglich ist, daß alsdann dieses Zeichen den Widerstreit gegen den ersten Sinn der Zählung andeute.

Uebrigens hat die Auslegung der Zeichen $+$ und $-$ als Vorzeichen den großen Vorzug, daß sie von den Größenverhältnissen der einzelnen Glieder unabhängig macht und dadurch erst der arithmetischen Formelsprache den erforderlichen Grad von Allgemeinheit sichert.

Beim Ansetzen einer Formel pflegt man die Zeichen $+$ und $-$ als Rechnungszeichen zu gebrauchen, indem man die einzelnen Glieder als absolute Zahlen ansieht. Dadurch aber, daß nun diese Zahlen nicht bloß im anfänglichen, positiven, sondern auch im entgegengesetzten, negativen Sinne genommen werden können, erhält die Formel eine Ausdehnung, daß sie alle möglichen besonderen Voraussetzungen derselben Aufgabe umfaßt.

So wurde früher (§. 41. 1) die Formel für die Verwandlung einer Fahrenheitischen in eine Reaumürsche Thermometerangabe $r = \frac{4}{9}(f - 32)$ anfänglich nur für die Voraussetzung aufgestellt, daß f vom Anfangspuncte aufwärts gezählte, sogenannte Grade der Wärme bedeute und größer als 32 sei. Das Zeichen $-$ galt als Subtractionszeichen.

Wird $f < 32$, aber noch im anfänglichen Sinne als Zahl von Wärmegraden genommen, so giebt dieselbe Formel nach den in diesem Abschnitte niedergelegten Regeln ein negatives Resultat; z. B. für $f = 5$ ist $r = \frac{4}{9}(5 - 32) = \frac{4}{9} \cdot (-27) = -12$. Das Zeichen — hat seinen Sinn als Rechnungszeichen mit dem als Vorzeichen vertauscht und fordert nun eine Zählung, welche, der anfänglichen entgegengerichtet, vom Anfangspuncte zu abwärts gelegenen Scalentheilen fortschreitet, die man gemeiniglich Grade der Kälte nennt. Es ist durchaus Gebrauch geworden, diese als negativ (z. B. -12^0 R), die sogenannten Wärmegrade hingegen als positive (z. B. $+12^0$ R) zu bezeichnen.

Soll nun endlich auch schon die Fahrenheitische Temperaturangabe f abwärts vom Anfangspuncte gezählte Grade bedeuten, so muß die Zahl f, weil sie im entgegengesetzten Sinne genommen ist, wie Anfangs vorausgesetzt wurde, als negativ in die Formel eingeführt werden. Das subtractive 32 ist in demselben Sinne gezählt, schließt sich daher dem negativen f als einstimmig an, indem das vorgesetzte Rechnungszeichen zum Vorzeichen wird; die vorgeschriebene Subtraction verwandelt sich in eine Addition von zwei einstimmigen negativen Zahlen; auch das Resultat wird negativ, die anfängliche Formel aber paßt unverändert auch für diesen Fall. Ist z. B. $f = -13$, so wird $r = \frac{4}{9}(-13 - 32) = \frac{4}{9} \cdot (-45) = -20$.

Wie ausdrucksvoll zugleich die arithmetische Darstellung von Größenverhältnissen durch Einführung der Vorzeichen geworden ist, mag auch durch dieses Beispiel noch gelegentlich wieder in Erinnerung gebracht werden.

Auf ähnliche Art ist zu zeigen, wie auch die früher (§. 41. 1) erklärte Formel $c = 754 - r$, nach welcher die römische Zeitrechnung in die unsrige übertragen werden sollte, alle möglichen Voraussetzungen in Absicht auf die Werthe von r (Siehe auch die Anmerk. zu S. 144) vermittelst der in diesem Abschnitte gelehrten Bezeichnung und Rechnungsregeln sich unterwirft, und welchen Sinn die verschiedenen Vorzeichen der Resultate haben.

Auch andere Rechnungsregeln, am besten nach besonderen, selbsterfundenen Aufgaben, sind in Formeln einzukleiden, und diesen hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit für alle möglichen Voraussetzungen die nöthigen Erläuterungen hinzuzufügen.

Siebenter Abschnitt.

Anwendung der vier einfachen Rechnungsarten zur Lösung wirklicher Aufgaben.

---

§. 47.

Zwei Classen von Aufgaben; — Gleichungen; — Auflösung derselben; — Algebra.

Nachdem die Begriffe der vier einfachen Rechnungsarten und die Regeln ihrer Ausführung mit Zahlen jeder möglichen Form in den vorigen Abschnitten entwickelt, und zumal im letzten Abschnitte durch die Unterscheidung eines doppelten Sinnes der Zählung auf die höchste Stufe wissenschaftlicher Allgemeinheit erhoben worden sind, darf auch für die Anwendung derselben zur Lösung wirklicher Aufgaben, so weit es in allgemeinen Umrissen möglich ist, eine Anleitung gefordert werden.

1. Arithmetische Aufgaben verlangen überhaupt die Bestimmung unbekannter Größen aus ihrem bekannten Zusammenhange mit anderen gegebenen Größen. Aber in Hinsicht auf das Wesen und den Ausdruck dieses Zusammenhanges gestatten sie unzählige Verschiedenheiten, und andere Voraussetzungen bedingen auch andere Wege der Auflösung. Gleichwohl lassen sich nach einem allgemeinen Eintheilungsgrunde sämmtliche Aufgaben in zwei verschiedene Abtheilungen bringen.

2. Bei den Aufgaben der ersten Classe werden durch die angegebenen Umstände unmittelbar auch die Operationen vorgeschrieben, welche an oder mit den gegebenen Zahlen vorzunehmen sind, um die gesuchten

zu finden. Zu ihrer Auflösung bedarf es nur der wirklichen Ausführung der verlangten Rechnungen, und dazu sind alle nöthigen Regeln im Vorhergehenden entwickelt, sofern keine andere als die einfachen Rechnungsarten in der Aufgabe gefordert werden. — Und von Aufgaben, die sich nicht auf diese zurückführen ließen, kann natürlich hier noch gar nicht die Rede sein. — Höchstens könnte noch erst verlangt werden, die Beziehungen der gegebenen Größen zu einander, welche die Aufgabe vielleicht nur unter anderen Namen feststellt, in die arithmetische Kunstsprache, auch wohl in die arithmetische Bezeichnung einzukleiden; allein auch dazu bedarf es keiner weiteren Anleitung.

In diese Classe gehören als Beispiele der einfachsten Art alle bisher schon erledigten Aufgaben der vier einfachen Rechnungsarten selbst, oder solche, welche Summen, Differenzen, Producte oder Quotienten gegebener Zahlen zu bestimmen fordern, — dieselben Aufgaben mit benannten Zahlen, — Zurückführungen benannter Zahlen auf niedrigere oder höhere Einheiten (sogenannte Resolutionen und Reductionen), wobei es nur darauf ankommt, die Verhältnisse der Einheiten verschiedener Ordnung zu einander zu kennen, — und dergleichen Aufgaben mehr. — Von zusammengesetzteren Aufgaben dieser Art, welche in bestimmter Aufeinanderfolge mehre der vier Grundoperationen mit gegebenen Zahlen zu verrichten fordern, nur ein Beispiel.

Drei Kaufleute haben auf gemeinschaftliche Kosten einen Handel unternommen. Der erste gewinnt dabei 240 ₰, der zweite 80 ₰ weniger als dreimal so viel, und der dritte halb so viel als der zweite. Sie wollen den Gewinn gleich unter sich vertheilen; wie viel erhält ein Jeder? — Nun hat der zweite dreimal so viel als der erste weniger 80, also $3 \,.\, 240 - 80 = 640$, und der dritte wieder halb so viel als dieser, also $\frac{640}{2} = 320$ ₰ gewonnen. Werden alle drei Gewinne addirt, $240 + 640 + 320$, so beträgt die Summe 1200 ₰, und der dritte Theil davon, 1200 ₰ $: 3 = 400$ ₰, ist der gesuchte Antheil eines Jeden. Die Operationen, durch welche derselbe zu berechnen war, wurden unmittelbar durch die Aufgabe vorgeschrieben. Die ganze Rechnung bloß angedeutet, ist die gesuchte Zahl

$$= \left(240 + 3 \,.\, 240 - 80 + \frac{3 \,.\, 240 - 80}{2}\right) : 3.$$

Aehnliche Beispiele.

3. Gesetzt aber, der Gewinn des ersten Kaufmanns wäre nicht genannt, alle übrigen Angaben der vorigen Aufgabe würden beibehalten, und die neue hinzugefügt, daß bei der Theilung jeder der drei Theilnehmer 400 ℳ erhalten habe; so muß allerdings die Möglichkeit vorhanden sein, ja es darf gefordert werden, aus diesen Angaben die Bestimmung herzuleiten, daß der erste 240 ℳ, weder mehr noch weniger, zu der ganzen zu vertheilenden Summe beigetragen habe. Denn sobald er mehr oder weniger beigesteuert hätte, würden auch die Beiträge des zweiten und dritten und der Antheil eines Jeden größer oder geringer ausgefallen sein. Aber welche Operationen nun zur Auffindung der unbekannten Größe erforderlich sind, wie man, um sie zu entdecken, mit den gegebenen Zahlen rechnen solle, das wird unmittelbar und geradezu durch die Aufgabe nicht mehr vorgeschrieben. Vielmehr flicht sie die unbekannte Größe selbst mit in die Rechnung ein, durch welche das genannte Resultat erhalten sein soll, und überläßt es nun dem Scharfsinn des Rechners, aus diesem und der angegebenen Art und Weise seiner Entstehung auf die unbekannte Größe, welche mit in die Verbindung einging, den Rückschluß zu machen. So gestellt, gehört die Aufgabe der zweiten Abtheilung an.

Das Wesen der Aufgaben dieser Classe besteht darin, daß sie nicht, wie die zuerst genannten, lauter bekannte Größen in bestimmte Verbindungen zu bringen vorschreiben, deren Resultate die gesuchten Größen sind, sondern diese selbst, gleich als wären sie schon bekannt, mit in die Rechnung verflechten, und die Resultate solcher Verbindungen entweder unmittelbar, wie im vorigen Beispiele, bloß durch bekannte Zahlen, oder mittelbar selbst wieder durch ähnlich gebildete Verbindungen bekannter und unbekannter

Zahlen ausdrücken. Allgemein also stellen sie die Gleichheit zweier Zahlenverknüpfungen fest, in welche die gesuchten Größen durch bestimmte Rechnungsarten verflochten sind, und verlangen, nach den dadurch ausgesprochenen Bedingungen die Werthe der unbekannten Größen zu bestimmen.

4. Schon um diese Bedingungen klar und übersichtlich darzustellen, noch mehr aber, um den Weg der Auflösung zumal verwickelterer Aufgaben vorzeichnen zu können, wird der Gebrauch der Zeichen fast unentbehrlich. Man wählt deßhalb auch für die unbekannten Größen eigene Zeichen, gewöhnlich die letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabeths x, y, z 2c., (während die ersten a, b, c, d 2c. bei allgemeinen symbolischen Rechnungen meistens gegebene Zahlen vorstellen sollen), deutet alle Verbindungen, welche die Aufgabe vorschreibt, durch die Zeichen der arithmetischen Operationen an, und stellt je zwei Ausdrücke, deren Werthe vermöge der aufgestellten Bedingungen gleich sein sollen, durch das Gleichheitszeichen (=) einander gegenüber. So entstehen Gleichungen, Ausdrücke, in welchen zwei bestimmte Zahlenverbindungen einander gleich gesetzt werden. Ihre Herleitung aus den Umständen der Aufgabe nennt man den Ansatz derselben.

So wird z. B. die Voraussetzung der vorhin genannten Aufgabe auf folgende Weise zum Ansatz gebracht. Der Gewinn des ersten Kaufmanns wurde als die unbekannte und gesuchte Größe angenommen; wir bezeichnen sie durch x. Der zweite sollte 80 ₰ weniger als das Dreifache, also $3x - 80$, und der dritte halb so viel als dieser, mithin $\frac{3x-80}{2}$ ₰ gewonnen haben. Die Summe aller drei Gewinne unter die drei Theilnehmer gleich vertheilt, soll ein Jeder 400 ₰ erhalten haben. Es muß folglich

$$\left(x + 3x - 80 + \frac{3x - 80}{2}\right) : 3 = 400$$

sein. — Früher, als der Gewinn des ersten Kaufmanns = 240 ₰ gegeben, und bei übrigens gleichen Voraussetzungen der Antheil eines Jeden am Gesammtgewinne gesucht wurde, fanden wir für den letzteren den Ausdruck welcher für jede unbekannte Größe, die zur Bestimmung derselben beiträgt, auch nur ein einziger, ganz bestimmter Werth abgeleitet werden könne, und daß es zu diesem Zwecke nicht genüge, bloß zu wissen, der eine Werth sei größer oder kleiner als der andere, leuchtet von selbst ein.

An einfachen Beispielen zu erläutern. — (Wenn $x + 3 = 7$ sein soll, so muß $x = 4$ sein; wenn $x + 3 > 7$ sein soll, so kann $x = 5, 6, 7$ 2c. überhaupt jede Zahl sein, die größer als 4 ist, und sollte $x + 3 < 7$ sein, so darf für x jede Zahl, die kleiner als 4 ist, angenommen werden).

Wie jetzt die Aufgabe gestellt ist, kennt man, allgemein gesprochen, ein Gewordenes und die Art seiner Entstehung, und man will daraus auf die Größe des einen oder anderen Elements, welches zu seiner Entstehung beigetragen hat, den Rückschluß machen; — oder in die Sprache der Arithmetik übertragen: man kennt das Resultat einer Verbindung bekannter und unbekannter Zahlen (gleichviel ob dasselbe unmittelbar als bestimmte Zahl, oder mittelbar dadurch gegeben ist, daß es einer zweiten ähnlichen Verbindung gleichgesetzt wird), und die Art seiner Berechnung, und man will daraus auf den Werth der unbekannten Zahlen den Rückschluß machen. — Soll dieser Zweck erreicht werden können, so muß es möglich sein, die gesuchte Zahl aus den Verbindungen mit bekannten Zahlen, welche die Gleichung vorschreibt, vollständig wieder auszusondern, oder die Form der Gleichung so zu verändern, daß das Zeichen der gesuchten Größe allein auf der einen Seite, ihr Werth, bloß durch bekannte Zahlen ausgedrückt, auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens erscheint. Ist dieses geschehen, so nennt man die Gleichung aufgelöst, und das Verfahren, durch welches eine Gleichung der beschriebenen Form aus der gegebenen abgeleitet wird, die Auflösung derselben.

Der Inbegriff von Regeln, welche die Auflösung von Gleichungen leiten, heißt Algebra im engeren Sinne des Worts*) (arabischen, aber nicht genau nachzuweisenden Ursprungs).

---

*) Daher auch der Name algebraische Gleichungen. — Und weil durch die eigentliche Algebra wohl zuerst der Gebrauch der Buchstaben zur

Die allgemeinen Grundsätze dieses wichtigen Theils der Größenwissenschaft und deren Anwendung zunächst auf solche Gleichungen, deren Auflösung nur die Kenntniß der vier Grundoperationen voraussetzt, sind Gegenstand des vorliegenden Abschnitts.

§. 48.

Oberster Grundsatz der Algebra; — Anwendung desselben auf die vier Grundoperationen.

1. Eine Gleichung auflösen, heißt, um es kurz zu wiederholen, von ihr auf den Werth einer unbekannten Größe schließen, welche mit in sie verwickelt ist. Dieser Schluß nimmt selbst wieder die Form einer Gleichung an: man stellt den gefundenen Werth dem Zeichen der gesuchten Größe als gleich gegenüber, ($x = a$, unter x die gesuchte, unter a eine bekannte Zahl oder das Resultat einer Verbindung bekannter Zahlen verstanden). Eine Gleichung also, welche das Zeichen der gesuchten Zahl allein auf der einen, ihren Werth, bloß durch bekannte Zahlen berechnet, auf der anderen Seite enthält, aus der anfänglichen Gleichung abzuleiten, ist das Ziel der Auflösung. Um dasselbe zu erreichen, müssen alle Operationen, durch welche in der gegebenen Gleichung die gesuchte mit bekannten Zahlen in Verbindung gebracht werden sollte, wieder aufgehoben oder rückgängig gemacht werden, so jedoch, daß aus der angenommenen stets auf die Gleichheit der abgeleiteten Ausdrücke geschlossen werden darf. Wie dieses geschehen kann, mag zuerst an Beispielen der einfachsten Art gezeigt werden.

Die Resultate zu finden, wenn zwei gegebene Zahlen durch eine der vier einfachen Rechnungsarten in Verbindung gebracht werden sollen, sind die einfachsten Aufgaben der ersten Classe. Umgekehrt, wenn nur eine dieser Zahlen gegeben, die anderen unbe-

---

Bezeichnung unbestimmter Größen oder Zahlen eingeführt, und durch diesen wieder die Unterscheidung positiver und negativer Zahlen nöthig geworden ist, hat man auch das Rechnen mit Buchstaben und positiven und negativen Zahlen, als zur Algebra gehörig und zum Unterschiede von dem gemeinen Rechnen mit absoluten Zahlen, das algebraische genannt (S. §. 41. 10).

stimmt gelassen, dafür aber auch das Resultat ihrer vorgeschriebenen Verbindung angegeben wäre; so würde die Forderung, jene zweite Zahl wiederzufinden, zu den einfachsten Aufgaben der zweiten Classe gehören. Alle möglichen Fälle, welche unter dieser Voraussetzung begriffen sind, lassen sich beispielsweise durch folgende Gleichungen darstellen:

1) $x + 4 = 7$ 2) $x - 4 = 7$ 3) $11 - x = 7$

4) $5x = 20$ 5) $\frac{x}{5} = 6$ 6) $\frac{30}{x} = 5$

Um sie aufzulösen, genügt es, bloß den Sinn der Zeichen und das Verhältniß je zwei einander entgegengesetzter Rechnungsarten zu kennen. Es bedarf keiner Auseinandersetzung, um einzusehen, daß, wenn

1) $x + 4 = 7$, 2) $x - 4 = 7$, 3) $11 - x = 7$

$x = 7 - 4$ $x = 7 + 4$ $11 = 7 + x$ und

$= 3$ $= 11$ $11 - 7 = x = 4$

4) $5x = 20$, 5) $\frac{x}{5} = 6$, 6) $\frac{30}{x} = 5$

$x = \frac{20}{5} = 4$ $x = 5 . 6 = 30$ $30 = 5x$ und

$\frac{30}{5} = x = 6$ ist.

Verallgemeinern wir die vorigen Ausdrücke, so folgt

aus 1) $x + a = b$ 2) $x - a = b$ 3) $a - x = b$

$x = b - a$ $x = b + a$ $a = b + x$ und

$a - b = x$

4) $ax = b$ 5) $\frac{x}{a} = b$ 6) $\frac{a}{x} = b$

$x = \frac{b}{a}$ $x = ab$ $a = bx$ und

$\frac{a}{b} = x.$

Die hier bloß durch Zeichen angedeuteten Schlüsse sind in der Kunstsprache der Arithmetik zu wiederholen.

Was in allen vorigen Fällen geschehen ist, um die gegebenen

Gleichungen aufzulösen, lässt sich auf den einfachen Schluss zurückführen: wenn eine Zahl, mit einer anderen durch eine bestimmte Rechnungsart verknüpft, ein gegebenes Resultat hervorbringen soll, so findet man die zweite, wenn mit der ersten am Resultate die entgegengesetzte Rechnungsart verrichtet wird. Im Grunde aber ist dieselbe Rechnungsart mit derselben Zahl an beiden Seiten der gegebenen Gleichung vorgenommen. Die eine Seite deutet bloß als aufgegeben die Verbindung zweier Zahlen an, deren fertiges Resultat die andere darstellt. Dort also hebt man durch die umgekehrte Rechnungsart die vorgeschriebene, da beide mit derselben Zahl verrichtet werden, nur wieder auf, während hier, am Resultate, dieselbe Rechnung noch gefordert wird.

2. Ueberhaupt also stützen sich die vorigen Schlüsse auf den allgemeinen Grundsatz, daß **gleiche Operationen, an und mit gleichen Größen vollzogen, gleiche Resultate geben.**

Auf ihm beruht die ganze Algebra; ihre Regeln sind nur auf bestimmte Zwecke berechnete Anwendungen desselben. Zunächst sollen dieselben sich nur auf die vier einfachen Rechnungsarten erstrecken; bloß auf diese bezogen, lässt sich der vorige Grundsatz aussprechen, wie folgt: **wenn auf beiden Seiten einer Gleichung dieselben Zahlen addirt oder subtrahirt, oder wenn beide Seiten mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt werden, so sind die Resultate selbst wieder einander gleich.** In Zeichen:

wenn $A = B$, so ist auch

$$A + m = B + m$$

$$A - m = B - m$$

$$A \,.\, m = B \,.\, m$$

und $$\frac{A}{m} = \frac{B}{m}.$$

Es mag nun zuvörderst gezeigt werden, welchen Gebrauch man von diesen Sätzen macht.

3. Auf beiden Seiten einer Gleichung dürfen, unbeschadet der Gleichheit, dieselben Zahlen **addirt** oder **subtrahirt** werden. Wenn

daher ein Glied von einer Seite der Gleichung fortgeschafft werden soll, so braucht man es nur auf beiden Seiten zu subtrahiren, oder mit entgegengesetztem Zeichen (im widerstreitenden Sinne) genommen zu addiren. Wenn z. B. in der Gleichung $x + a - b = c$ die unbekannte Größe x von ihrer Verbindung mit den beiden bekannten Gliedern a und b befreit werden soll, so braucht man nur auf beiden Seiten $a - b$ zu subtrahiren oder $- a + b$ zu addiren, also:

$$\begin{array}{lll} & x + a - b = c & \qquad \text{oder} \quad x + a - b = c \\ \text{subtrahirt} & \underline{\quad\; a - b = \;\; a - b} & \qquad \text{addirt} \quad \underline{\;\; - a + b = - a + b} \\ & x \qquad\;\; = c - a + b; & \qquad x \qquad\qquad\quad = c - a + b \end{array}$$

Dieses Verfahren, durch welches Glieder von der einen Seite der Gleichung auf die andere geschafft werden, heißt **Transposition**. Die mechanische Regel dafür verlangt, **daß man das von der einen Seite weggenommene Glied auf der anderen mit entgegengesetztem Zeichen wieder ansetzt.**

Die Ableitung dieser Regel so zu wiederholen, daß das Verfahren für solche Glieder, welche addirt, und für solche, welche subtrahirt werden sollten, besonders angegeben wird.

B. — Unter den angenommenen Gleichungen müssen auch solche vorkommen, welche auf beiden Seiten bloß bekannte und auch solche Glieder enthalten, welche das Zeichen der unbekannten Größe in sich schließen. Man stelle sich immer die Aufgabe, die letzteren auf die eine, alle übrigen Glieder auf die andere Seite zu schaffen.

Bringt man alle Glieder der einen Seite mit auf die andere, so wird der Inbegriff sämmtlicher Glieder = 0, und man nennt die Gleichung **auf Null reducirt** oder **annullirt**. Aus der vorigen Gleichung z. B. erhält man

$$x + a - b - c = 0.$$

B.

Werden alle Glieder der einen Seite auf die andere, und umgekehrt die Glieder dieser Seite auf jene transponirt, so unterscheidet sich die neue Gleichung von der ersten nur dadurch, daß die Zeichen vor sämmtlichen Gliedern in die entgegengesetzten verwandelt sind. **Man darf daher die Zeichen vor sämmtlichen Gliedern einer Gleichung umkehren;** z. B.

aus $x + a - b = c$
wird $-x - a + b = -c.$

Anmerk. Am häufigsten gebraucht man diesen Satz, wenn die gesuchte Zahl als negativ zum Ansatz kommt: aus

$-x = a$ folgt $x = -a.$

B.

4. Auch wenn beide Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl **multiplicirt** werden, sind die Resultate (Producte) selbst wieder gleich. Dadurch wird es möglich, Divisionen, welche die Gleichung verlangt, rückgängig zu machen, oder wie man sich auszudrücken pflegt, **Divisoren** oder **Nenner** aus derselben **fortzuschaffen**. Man multiplicirt nur die ganze Gleichung mit dem fortzuschaffenden Divisor oder Nenner, so wird er da, wo er vorkam, aufgehoben. (Am häufigsten wird dieß verlangt, wenn er selbst oder doch das Glied, dem er angehört, die unbekannte Größe in sich schließt.) So wird z. B. aus der Gleichung $\frac{x}{4} - m = 9$ durch Multiplication mit 4 die neue $x - 4m = 36$, und aus der Gleichung $\frac{m + cx}{a - x} = d - 2x$ durch Multiplication mit $(a - x)$ die neue

$$m + cx = d(a - x) - 2x(a - x) \text{ oder}$$
$$m + cx = ad - dx - 2ax + 2xx \text{ abgeleitet.}$$

Um also irgend ein Glied einer Gleichung von seinem Divisor oder Nenner zu befreien, lasse man ihn aus demselben weg, und setze ihn allen übrigen Gliedern als Factor bei.

Unbedenklich ist die Multiplication der ganzen Gleichung mit jedem beliebigen Divisor aber nur dann gestattet, wenn derselbe eine unbenannte Zahl ist. Wäre er indessen benannt, so müsste der zugehörige Dividend, wenn die verlangte Division überall möglich sein soll, dieselbe Benennung haben (§. 11. 4), und alsdann ist der Quotient eine unbenannte Zahl, gerade so, als wären auch Dividend und Divisor unbenannte Zahlen. Um daher in einer Gleichung nach Belieben jeden Divisor aufheben zu können, setzt man den Quotienten gleichbenannter Zahlen, da er ohnehin eine unbenannte

Zahl wird, gleich von Anfang herein als Quotienten aus denselben unbenannten Zahlen an.

Sind in einer Gleichung mehre Divisoren oder Nenner fortzuschaffen, so braucht man das eben beschriebene Verfahren nur nach und nach auf alle anzuwenden. Oder sollen sie alle mit einem Male aufgehoben werden, so müßte man die ganze Gleichung mit einer Zahl multipliciren, welche ihnen als gemeinschaftlicher Dividend oder Nenner zukäme (§. 23. 2). — Befinden sich unter den fortzuschaffenden Nennern mehre, die einander gleich sind, oder auch nur gleiche Factoren enthalten, so wird die Rechnung abgekürzt, wenn bei der Multiplication mit jedem früheren Nenner die gleichen oder gleiche Factoren der übrigen aufgehoben werden. Und will man auch in solchen Fällen mit einem Male und auf dem kürzesten Wege die Gleichung von allen Divisoren oder Nennern befreien, so multiplicire man sie mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Dividend oder dem kleinsten Generalnenner derselben (§. 23. 3) z. B. aus $\frac{x}{4a} + \frac{5x}{6} - \frac{b}{10} = \frac{cx}{15ab} + 1$ wird durch Multipl. mit $60ab$:
$15bx + 50abx - 6abb = 4cx + 60ab$.

Die Gleichungen $\frac{x}{2} - 5 = \frac{x}{3} + 4$,

$$\frac{a+bx}{m} - dx + \frac{x}{c} = 0,$$

$$\frac{x+3}{x-3} + 5 = 10\tfrac{1}{2},$$

$$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} = c + \frac{mx}{a+x},$$

$$\frac{x}{9} + \frac{x}{12} - \frac{4-x}{3} = \frac{x+1}{20} - 4,$$

$$\frac{a-x}{4a+4x} = \frac{c-\frac{1}{2}x}{2a+2x},$$

$$\frac{m(x+1)}{4b} - \frac{7c}{16} = \frac{11x}{120(b+1)} + \frac{3d-4}{bb-1},$$

u. a. von ihren Nennern zu befreien.

Werden alle Glieder einer Gleichung mit -1 multiplicirt, so kehren sich bloß die Zeichen vor denselben um, — eine Bestätigung des schon vorhin (Nro. 3) abgeleiteten Satzes, daß die Umkehrung der Zeichen vor allen Gliedern einer Gleichung erlaubt sei. B.

5. Die Gleichheit zweier Ausdrücke besteht endlich auch dabei fort, wenn beide durch die nämliche Zahl dividirt werden. Soll also die Multiplication mit irgend einem Factor aufgehoben werden, so dividirt man die ganze Gleichung durch denselben, oder man läßt ihn aus dem Gliede weg, welches ihn enthält, und gesellt ihn allen übrigen als Divisor bei; z. B.

$$4x + \frac{a}{m} = 20b - c, \text{ dividirt durch 4, giebt:}$$

$$x + \frac{a}{4m} = 5b - \frac{c}{4}.$$

Meistens bedient man sich dieser Regel, wenn die unbekannte Größe mit einem bekannten Factor behaftet ist, den man gewöhnlich ihren Coefficienten nennt, um sie von demselben zu befreien. Hat die Gleichung die Gestalt $ax = b$ angenommen, so dividirt man sie durch den Coefficienten der unbekannten Größe, a, und findet $x = \frac{b}{a}$. B.

Außerdem läßt sich die Regel auch gebrauchen, um eine Gleichung zu vereinfachen, indem man sie nämlich, wenn in allen Gliedern derselbe Factor vorkommt, durch diesen dividirt, z. B.

$$20(x - 4) + 35 = \frac{5x}{6} + 185,$$

dividirt durch 5, giebt:

$$4(x - 4) + 7 = \frac{x}{6} + 37;$$

$$axx - (b - c)x = dx + \frac{xx - hx}{m},$$

dividirt durch x, giebt:

$$ax - (b - c) = d + \frac{x - h}{m}.$$

Aehnliche Beispiele.

Die Division einer Gleichung durch -1 hat denselben Erfolg, wie die Multiplication mit -1 (S. Nro. 4).

Anmerk. Hat eine Gleichung die Form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so darf man nach dem Satze, daß Gleiches durch Gleiches dividirt gleiche Resultate giebt, die Brüche auf beiden Seiten auch umkehren: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Denn da $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $1 = 1$ ist, so wird auch

$$1 : \frac{a}{b} = 1 : \frac{c}{d}, \text{ oder}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Wie läßt sich die zweite Gleichung auch sonst noch aus der ersten ableiten? — B. — Dürften auch in der Gleichung $\frac{a}{b} + \frac{1}{x} = \frac{c}{d-x}$ sämmtliche Brüche umgekehrt werden?

§. 49.

Auflösung einfacher Gleichungen mit einer unbekannten Grösse.

Die vorigen Sätze haben gezeigt, welche Veränderungen mit der Form einer Gleichung sich durch Hülfe der vier einfachen Rechnungsarten vornehmen lassen, und wie jede, durch eine derselben gestiftete Verbindung durch die entgegengesetzte Rechnungsart wieder aufgehoben werden kann. Es bleibt nur noch übrig, eine Anweisung zu geben, wie die dafür beigebrachten Regeln am zweckmäßigsten zur wirklichen Auflösung gegebener Gleichungen anzuwenden sind. Um dabei mit dem einfachsten Falle zu beginnen, nehmen wir an, die aufzulösende Gleichung enthalte nur eine unbekannte Größe.

1. Ehe man aber diejenigen Schritte einleiten kann, welche unmittelbar auf die Auflösung der Gleichung abzielen, wird es oft nöthig, gewisse vorbereitende Operationen mit derselben vorzunehmen, welche bloß den Zweck haben, ihr eine entwickelte Gestalt zu geben.

a. Sind nämlich in der Gleichung mehrtheilige Factoren vorhanden, in welche auch die unbekannte Größe mit verwickelt ist, so führt man die angedeuteten Multiplicationen (nach §. 10. 5, 6 und 7 und §. 29. 6) wenigstens so weit aus, daß diejenigen Theile der

Producte, welche die unbekannte Größe behalten, von denjenigen, welche sich aus bloß bekannten Zahlen zusammensetzen, vollständig getrennt werden. So wird z. B.

1) aus $(5x - 3) \cdot 4 = \frac{3x}{2} + \frac{5x}{6} + 200$

$$20x - 12 = \frac{3x}{2} + \frac{5x}{6} + 200,$$

und 2) aus $(ax - b) \cdot c = \frac{x}{m} + d$

$$acx - bc = \frac{x}{m} + d.$$

b. Kommen ferner Divisoren oder Nenner vor, welche entweder selbst die unbekannte Größe in sich schließen oder Gliedern angehören, in welche dieselbe auf andere Art verwickelt ist, so schafft man diese jedenfalls, meistens aber auch die übrigen Nenner fort, welche die Gleichung sonst noch enthält (nach §. 48. 4).

Aus den vorigen Gleichungen z. B. erhält man, die erste mit 6, die zweite mit m multiplicirt.

1) $120x - 72 = 9x + 5x + 1200$

und 2) $acmx - bcm = x + dm$.

Wäre ein solcher Divisor aus Theilen zusammengesetzt, so führt man die Multiplication mit demselben in denjenigen Gliedern, wo er sich als Factor einstellt, nach der vorigen Regel aus.

B.

Nachdem die genannten Operationen, wenn sie nöthig waren, mit der Gleichung vorgenommen sind, kann die unbekannte Größe in denjenigen Gliedern, wo sie vorkommt, nur noch als Factor erscheinen, wenn sie nicht für sich allein schon ein Glied ausmacht. Die Gleichung kann demnach außer diesen Gliedern nur noch solche enthalten, welche sich bloß aus bekannten Zahlen zusammensetzen, und heißt jetzt entwickelt, gleichviel, ob sie in die beschriebene Form erst gebracht, oder gleich Anfangs so gegeben ist.

c. Man untersucht nun, ob etwa die Gleichung auch solche Glieder enthält, in welchen die unbekannte Größe mehre Male als Factor vorkommt, und wenn es der Fall ist, ob sie sich von denselben nicht befreien läßt. Dieß kann in zwei Voraussetzungen geschehen: erstens, wenn jedes Glied der Art auf derselben Seite der Gleichung sich mit entgegengesetztem, oder auf der anderen Seite mit demselben Vorzeichen wiederholt; denn alsdann heben sich diese Glieder bei der Vereinigung oder durch gleichzeitige Subtraction auf beiden Seiten der Gleichung freiwillig auf; — zweitens, wenn die unbekannte Größe in allen Gliedern der Gleichung und in denen, wo sie sich am häufigsten wiederholt, höchstens einmal mehr als in den übrigen als Factor vorkommt; denn dividirt man nun die ganze Gleichung so oft durch die unbekannte Größe, als diese noch in allen Gliedern erscheint (§. 48. 5), so bleibt sie in denjenigen, wo sie am häufigsten vorkam, nur noch einmal als Factor stehen. Die erste Voraussetzung trifft z. B. zu bei der Gleichung

$$axx - bx + c = d - mx + axx, \text{ aus welcher}$$
$$-bx + c = d - mx \text{ folgt;}$$

die zweite bei der Gleichung

$$axx + bx = cxx - dx, \text{ aus welcher}$$
$$ax + b = cx - d \text{ folgt.}$$ B.

2. Erst nachdem die Gleichung entwickelt, und wenn es nöthig oder möglich war, auf die eben beschriebene Art vereinfacht ist, läßt sich beurtheilen, ob sie bloß durch die vier einfachen Rechnungsarten aufgelöst werden kann.

Dieß geht an, wenn nun in keinem Gliede die unbekannte Größe mehr als einmal als Factor vorkommt. Alsdann nennt man die Gleichung einfach oder ersten Grades — im Gegentheil höheren Grades, zweiten, dritten, vierten Grades u. s. w., wenn die unbekannte Größe in dem Gliede, wo sie am häufigsten vorkommt, zwei-, drei-, viermal u. s. w. als Factor steht. Nur für einfache Gleichungen läßt sich hier das weitere Verfahren der Auflösung angeben.

Beispiele, in welchen aus Gleichungen, die für einfach gehalten werden könnten, Gleichungen höheren Grades sich entwickeln, wie

$$\frac{3x - 4}{5x + 2} - 8 = \frac{1}{x}.$$

3. Die aufzulösende Gleichung also sei entwickelt, einfach und

enthalte nur eine unbekannte Größe: — so bringt man nun durch Transposition (§. 48. 3) alle diejenigen Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten, allein auf die eine, alle übrigen auf die andere Seite.

Aus den vorhin (Nro. 1. b) entwickelten Gleichungen, welche allen hier gemachten Anforderungen entsprechen, werden hiernach die folgenden abgeleitet:

$$1)\quad 120x - 9x - 5x = 1200 + 72$$

$$\text{und } 2)\quad acmx - x = bcm + dm.$$

4. Man zieht nun die Glieder jeder Seite, wenigstens diejenigen, in welchen die unbekannte Größe vorkommt (durch Absonderung derselben als gemeinschaftlichen Factors bei Buchstabenausdrücken), in ein Glied zusammen, — in den vorigen Beispielen giebt dieß:

$$1)\quad 106x = 1272$$

$$\text{und } 2)\quad (acm - 1) \, . \, x = (bc + d)m,$$

und dividirt endlich die ganze Gleichung durch den Coefficienten der unbekannten Größe (§. 48. 5). So erhält man aus den vorigen Gleichungen:

$$1)\quad x = \frac{1272}{106} = 12$$

$$\text{und } 2)\quad x = \frac{(bc + d)m}{acm - 1}.$$

5. Zur Probe, ob der für die unbekannte Größe gefundene Werth richtig sei, kann man ihn statt des Zeichens derselben überall in der anfänglichen Gleichung an die Stelle setzen und die Werthe beider Seiten berechnen, welche dann, wenn die Auflösung richtig ist, gleich werden müssen.

Diese Probe ist mit den beiden Werthen, welche die Auflösung in den vorigen Beispielen ergeben hat, wirklich anzustellen.

Uebrigens braucht kaum erinnert zu werden, daß nicht immer die Auflösung der Gleichung alle vorhin beschriebenen Operationen, oder diese immer in derselben Ordnung erfordert. Namentlich kann oft durch Transposition und Zusammenziehung gewisser Glieder zu rechter Zeit das Verfahren abgekürzt werden. Allein solche Vortheile muß ein Jeder im besonderen Falle selbst finden.

Vielfache Uebungen in der Auflösung gegebener Gleichungen (auch die §. 47. 4 angesetzte Gleichung ist jetzt aufzulösen) — und solcher Aufgaben, aus welchen erst der Ansatz der Gleichungen abgeleitet werden muß.

Anhang. Auflösung einiger Aufgaben, welche auf einfache Gleichungen mit einer unbekannten Größe führen.

1. Drei Brüder sollen sich in 15 Thlr. so theilen, daß der zweite doppelt, der dritte dreimal so viel erhält als der erste. Wie viel erhält jeder?

Nennt man was der erste bekommen wird x, so erhält der zweite 2x, der dritte 3x, und alle drei zusammen 15; also:

$$x + 2x + 3x = 15$$
$$6x = 15$$
$$x = 15 : 6 = 2\tfrac{1}{2}$$

Mithin erhält der erste $2\frac{1}{2}$ Thlr., der zweite $2 \,.\, 2\frac{1}{2}$ Thlr. $= 5$ Thlr., und der dritte $3 \,.\, 2\frac{1}{2}$ Thlr. $= 7\frac{1}{2}$ Thlr.

2. Sollte, um die vorige Aufgabe zu verallgemeinern, der zweite Bruder b, der dritte c mal so viel bekommen als der erste, und die ganze zu vertheilende Summe a sein, so erhält man die Gleichung

$$x + bx + cx = a, \text{ und daraus}$$
$$(1 + b + c) \,.\, x = a,$$

folglich

$$x = \frac{a}{1 + b + c}$$

Durch welchen Ausdruck wird hiernach der Antheil des zweiten und dritten Bruders dargestellt?

3. Jemand ist im Ganzen 480 Meilen gereist, $4\frac{1}{2}$ mal so viel zu Pferde als zu Fuß, und $2\frac{1}{3}$ mal so viel zur Post als zu Pferde: wie viel auf jede der drei angegebenen Arten?

Nimmt man die Zahl von Meilen, welche er zu Fuß gereist ist, als die gesuchte Zahl an und nennt sie x, so beträgt die Strecke, welche er zu Pferde zurückgelegt hat, $4\frac{1}{2}x = \frac{9x}{2}$, und diejenige, welche er mit der Post gereist ist, wieder $2\frac{1}{3}$ mal so viel, also $2\frac{1}{3} \,.\, \left(\frac{9x}{2}\right) = \frac{7}{3} \,.\, \frac{9x}{2} = \frac{21x}{2}$ Meilen. Die Summe aller drei Strecken soll 480 M. sein, also:

$$x + \frac{9x}{2} + \frac{21x}{2} = 480$$

(multiplicirt mit 2) $2x + 9x + 21x = 960$

$$32x = 960$$

$$x = 960 : 32 = 30.$$

Daraus findet sich die Länge des Weges, welchen er zu Pferde gemacht hat, $= 135$, und dessen, welchen er mit der Post gereist ist, $= 315$ M.

4. Im Wesentlichen mit der vorigen übereinstimmend, nur anders eingekleidet und zugleich verallgemeinert ist die folgende Aufgabe.

Von drei Städten A, B und C soll nach Verhältniß ihrer Einwohnerzahl eine Steuer zum Belaufe von a (Reichsthalern oder anderen Geldeinheiten) erhoben werden. Die Volksmenge von B verhält sich zu der von A, wie m zu n, und die von C zu der von B, wie p zu q. Welchen Beitrag hat A, B und C zu liefern?

Die Volksmenge von B verhält sich zu der von A, wie m zu n, heißt mit anderen Worten: so oft A n Einwohner zählt, hat B deren m, oder B enthält den nten Theil der Einwohnerzahl von A m mal, kürzer: B zählt $\frac{m}{n}$ mal so viel Einwohner als A. Auf entsprechende Art läßt sich die zweite Angabe, daß die Volksmenge von C zu der von B sich wie p zu q verhalte, auch so ausdrücken: C hat $\frac{p}{q}$ mal so viel Einwohner als B; und daraus folgt, daß C $\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}$ mal so viel Einwohner hat als A. Nennt man also den Beitrag, welchen A zu liefern hat, x, so ist der von B zu erhebende durch $\frac{m}{n}x$, und der von C zu erhebende durch $\frac{pm}{qn}x$ auszudrücken. Alle drei aber sollen zusammen die Summe a ausmachen.

$$\text{Folglich ist } x + \frac{mx}{n} + \frac{mpx}{nq} = a$$

$$(\text{multipl. mit } nq)\ nqx + mqx + mpx = anq$$

$$(nq + mq + mp)x = anq$$

$$\text{und} \qquad x = \frac{anq}{nq + mq + mp}$$

Wie viel hat demnach B und wie viel C zu geben? — Statt der Buchstaben a, m, n, p, q sind auch bestimmte Zahlen zu setzen, um die Auflösungsformel zu prüfen.

5. Eine Besatzung von 1200 Mann besteht aus Cavalleristen und Infanteristen. Zur Belohnung einer Waffenthat werden jedem Cavalleristen 18 Sgr. und jedem Infanteristen 16 Sgr. ausgezahlt, und dazu im Ganzen 825 Thlr. verwendet. Wie viele Cavalleristen befinden sich unter der Mannschaft?

Bezeichnen wir die gesuchte Zahl der Cavalleristen durch x, so beträgt die Zahl der Infanteristen 1200 — x. Jeder Cavallerist erhält 18 Sgr., wofür wir, um den Ansatz auf dieselbe Einheit zu beziehen, nach welcher die ganze vertheilte Summe angegeben ist, $\frac{18}{24}$ oder $\frac{3}{4}$ Thlr. setzen; also x Cavalleristen erhalten $\frac{3}{4} \cdot x$ Thlr. Jeder Infanterist bekommt 16 Sgr. oder $\frac{2}{3}$ Thlr., also 1200 — x Infanteristen $\frac{2}{3} \cdot (1200 - x)$ Thlr. Nun soll

$$\tfrac{3}{4}x + \tfrac{2}{3}(1200 - x) = 825 \text{ sein; also}$$

$$(\text{multpl. mit } 12)\ 9x + 8 \cdot (1200 - x) = 12 \cdot 825 = 9900$$

$$9x + 9600 - 8x = 9900$$

$$x = 9900 - 9600 = 300$$

Die Aufgabe ist so zu verallgemeinern, daß statt der Zahlen 1200, 825, $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ Buchstaben gesetzt, und die aufgestellten Bedingungen, von ihrer zufälligen Form entkleidet, rein arithmetisch ausgedrückt werden.

6. Auf einen ähnlichen Ansatz führen die Aufgaben der sogenannten Alligationsrechnung, z. B.

Man will aus 14 löthigem und $9\frac{1}{2}$ löthigem Silber (d. h. Silber, welches in der Mark oder 16 Loth 14 oder 9 Loth reines Silber, das Uebrige an Kupfer enthält) 10 Mark 12 löthiges zusammenmischen; wie viel Mark muß man von jeder Sorte nehmen?

Nennt man die Quantität, welche man von der ersten Sorte zu nehmen hat, x, also die der zweiten Sorte 10 — x, so enthält jene 14 x, diese $9\frac{1}{2} \cdot (10 - x)$ Loth reines Silber, und die Bedingung der Gleichheit liegt darin, daß beide Bestandtheile zusammen eben so viel reines Silber enthalten müssen, als die Mischung, hier 10 Mark 12 löthiges Silber, also 10 . 12 Loth. Mithin wird verlangt, daß

$$24x + 9\tfrac{1}{2}.(10 - x) = 10.12 \text{ sei.}$$

Daraus folgt:

$$28x + 19.(10 - x) = 240$$
$$28x + 190 - 19x = 240$$
$$9x = 240 - 190 = 50$$
$$x = \frac{50}{9} = 5\tfrac{5}{9}$$

und

$$10 - x = 4\tfrac{4}{9}$$

Aehnliche Aufgaben.

7. Ein Zinsen tragendes Capital heiße c, der Zinsfuß (3, 4, 5 pro Cent etc.) p, die Zahl von Jahren, während welcher das Capital Zinsen trägt, n, der Betrag der Zinsen selbst z, und das Capital mit Einschluß der Zinsen C, so wird der Zusammenhang zwischen allen diesen Größen durch die Gleichung

$$C = c + z = c + \frac{p.n}{100}.c$$

dargestellt. Jede der darin verflochtenen Größen C, z, c, p, n kann als die unbekannte angesehen, und die Berechnung ihres Werthes gefordert werden, wenn die übrigen gegeben sind.

Ableitung dieser Formeln, (nach welchen alle Aufgaben der einfachen Zinsrechnung zu lösen sind) und Anwendung derselben auf bestimmte Zahlenbeispiele.

8. Ein Bote, welcher täglich $7\frac{1}{2}$ Meile macht, ist vor 4 Tagen von einem Orte abgegangen, als ihm von eben diesem Orte und auf demselben Wege ein zweiter nachgeschickt wird, welcher täglich 10 Meilen macht. Wo wird der zweite den ersten einholen?

Die Antwort auf diese Frage wird am leichtesten gefunden, wenn man statt des Weges, welchen der zweite Bote zurückgelegt haben muß, um den ersten einzuholen, zunächst die Zeit zu bestimmen sucht, wann dieses geschieht. Man setze diese unbestimmt als x Tage nach der Abreise des zweiten Boten an. Alsdann wird der Ansatz einer Gleichung dadurch bedingt, daß die Wege, welche beide Boten in dieser Zeit gemacht haben, einander gleich sein müssen. Nun hat der erste in 4 Tagen bereits $4 \,.\, 7\frac{1}{2} = 30$ Meilen gemacht und wird in den folgenden x Tagen noch $7\frac{1}{2} \,.\, x$ Meilen weiter kommen, während der zweite Bote in eben dieser Zeit $10x$ Meilen macht. Es muß folglich

$$30 + 7\tfrac{1}{2}x = 10x$$
$$60 + 15x = 20x$$
$$60 = 20x - 15x = 5x$$

und $x = 60 : 5 = 12$ sein.

Also 12 Tage nach der Abreise des zweiten Boten, oder wenn dieser $10 \,.\, 12 = 120$, und der erste $30 + 7\frac{1}{2} \,.\, 12$, d. h. ebenfalls 120 Meilen vom Ausgangsorte entfernt ist, treffen beide zusammen.

Setzt man in der vorigen Aufgabe statt der Zahlen $7\frac{1}{2}$, 4 und 10 die allgemeinen Zeichen a, n und b, so erhält man die Gleichung:

$$an + ax = bx,$$

folglich $an = bx - ax = (b - a)x$

und $\dfrac{an}{b - a} = x.$

Welche Antwort giebt diese Formel, wenn $b = a$, oder wenn $b < a$ angenommen wird? und welche Auslegung gestatten diese Antworten? — Nachweisung ihres Ursprungs in den Voraussetzungen.

Aehnliche Beispiele, z. B. wann und wo treffen der Minuten- und Stundenzeiger einer Uhr, die um 12 Uhr über einander stehen, bei dem nächsten und so bei jedem folgenden Umlaufe des Minutenzeigers wieder zusammen?

9. Jemand hat bisher den zehnten Theil seines Gehaltes zur Anschaffung von Büchern verwendet und beschließt, einer erhaltenen Zulage wegen, künftig den sechsten Theil seiner ganzen Einnahme für denselben Zweck zu verwenden, weil ihm auch so noch zur Bestreitung seiner übrigen Ausgaben gleich viel übrig bleibt. Wie viel betrug, d. h. in welchem Verhältniß stand die erhaltene Zulage zu dem ersten Gehalte?

Nennt man die frühere Einnahme e, die Zulage x, also die dadurch vermehrte Einnahme $e + x$, so bleiben von jener nach Abzug eines Zehntels noch $\frac{9}{10}$, also $\frac{9}{10}e$, von dieser nach Abzug eines Sechstels noch $\frac{5}{6}$, also $\frac{5}{6}(e+x)$ übrig. Beide Reste sollen gleich sein, also

$$\frac{9}{10}e = \frac{5}{6}(e+x),\quad \text{(durch Multiplication mit 30)}$$
$$27e = 25(e+x)$$
$$27e = 25e + 25x$$
$$27e - 25e = 25x$$
$$\frac{2}{25}e = x.$$

Welchen Werth erhält x, wenn in der vorigen Aufgabe, alles Uebrige beibehalten, gesagt wäre, daß von der veränderten Einnahme $\frac{1}{12}$ statt $\frac{1}{6}$ zu dem angegebenen Zwecke bestimmt würde? — Wie und woher erklärt sich diese Auflösung?

10. Ein Bauplatz ist 8 Fuß länger als breit. Wollte man der Länge noch 12, der Breite noch 10 Fuß zugelegt haben, so würde der Platz 120 Thlr. theurer zu stehen kommen, da man jeden Quadratfuß mit $\frac{1}{9}$ Thlr. zu bezahlen hat. Wie groß war die zuerst abgesteckte Fläche?

Hier ist zunächst zu erwägen, daß man für 120 Thlr, da jeder Quadratfuß Land $\frac{1}{9}$ Thlr. kostet, $120 : \frac{1}{9} = 1080$ Quadratfuß mehr erhalten haben würde. — Ferner thut man wohl, nicht die Größe selbst, nach welcher gefragt wird, also nicht die Größe der Fläche, sondern zuerst die Länge ihrer einen Seite als die gesuchte Größe anzunehmen, da man denn nachher aus ihr die Länge der anderen Seite, und aus beiden die zu bestimmende Arealgröße leicht berechnen kann. Die Größe eines Rechtecks aber — wie wir stillschweigend die zu berechnende Figur vorausgesetzt haben — berechnet sich in Flächeneinheiten (hier Quadratfußen) durch das Product der beiden Zahlen, welche nach gleichnamigem Längenmaße (hier dem Fuß) seine Länge und Breite angeben.

Mag also die Breite des fraglichen Grundstücks x heißen, so ist seine Länge $x + 8$, und sein Flächeninhalt $x(x + 8)$. Würden der Breite noch 10, der Länge noch 12 Fuß zugelegt, so betrüge jene $x + 10$, diese $x + 8 + 12 = x + 20$ Fuß, und die so vergrößerte Fläche enthielte $(x + 10).(x + 20)$ Quadratfuß. Die zuletzt berechnete Fläche soll aber 1080 Quadratfuß größer sein, als die erste, mithin muß

$$(x + 10).(x + 20) - 1080 = x(x + 8) \text{ sein.}$$
$$\text{(Entwickelt) } xx + 10x + 20x + 200 - 1080 = xx + 8x$$

(Nach Aufhebung des auf beiden Seiten vorkommenden Gliedes xx [S. §. 49. 1, c] und Zusammenziehung gleichartiger Glieder)

$$30x - 880 = 8x$$

(Transponirt) $$22x = 880$$

$$x = 40.$$

Die Breite beträgt also 40, die Länge 48 Fuß, folglich die Größe der Fläche 40 . 48 = 1920 Quadratfuß. Bei einer Vermehrung der Breite um 10, der Länge um 12 Fuß würde sie 50.60 = 3000, also 1080 Quadratfuß mehr enthalten haben.

Verallgemeinerung dieser Aufgabe.

11. Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um 25 pro Cent, nimmt aber am Ende jedes Jahres 1000 Thlr. zur Bestreitung seiner Ausgaben davon. Am Ende des dritten Jahres fehlen nach Abzug der gewöhnlichen 1000 Thlr. nur 375 Thlr., damit das Vermögen sich um volle zwei Drittel seines anfänglichen Werthes vergrößert hätte. Wie viel beträgt es demnach jetzt?

Um diese Frage zu beantworten, suche man zuerst den Werth des anfänglichen Vermögens zu bestimmen und nenne ihn x. Dieser soll sich im ersten Jahre um 25 pro Cent oder $\frac{25}{100}$, kürzer um $\frac{1}{4}$ vergrößert haben, und beträgt also am Ende des Jahres $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ mal so viel als zu Anfange desselben, mithin $\frac{5}{4}x$. Nach Abzug von 1000 Thlrn. bleiben übrig $\frac{5}{4}x - 1000$, und dieser Rest vermehrt sich im nächsten, zweiten Jahre wieder um 25 p.C. oder $\frac{1}{4}$, so daß man am Ende desselben $\frac{5}{4}.(\frac{5}{4}x - 1000)$ hat. Davon abermals 1000 abgezogen und den Rest $\frac{5}{4}$ mal genommen, würde man den Betrag des Vermögens am Ende des dritten Jahres finden, d. i. $\frac{5}{4}.(\frac{5}{4}.(\frac{5}{4}x - 1000) - 1000)$. Davon nochmals 1000 Thlr. weggenommen, soll der Rest nur 375 Thlr. weniger betragen, als das um $\frac{2}{3}$ seines anfänglichen Werthes vermehrte Capital, $1\frac{2}{3}x$ oder $\frac{5}{3}x$. Es ist also

$$\frac{5}{4}.(\frac{5}{4}.(\frac{5}{4}x - 1000) - 1000) - 1000 = \frac{5}{3}x - 375$$

oder $$\frac{5}{4}.(\frac{5}{4}.(\frac{5}{4}x - 1000) - 1000) = \frac{5}{3}x + 625$$

(dividirt durch 5) $$\frac{1}{4}.(\frac{5}{4}.(\frac{5}{4}x - 1000) - 1000) = \frac{x}{3} + 125$$

$$\frac{25x}{64} - \frac{5.1000}{16} - \frac{1000}{4} = \frac{x}{3} + 125$$

$$\text{(multipl. mit 64)}\quad 25x - 20000 - 16000 = \frac{64x}{3} + 8000$$

$$\text{(transponirt)}\qquad 25x - \frac{64x}{3} = 44000$$

$$\text{(multipl. mit 3)}\qquad 75x - 64x = 3\,.\,44000$$

$$11x = 3\,.\,44000$$

$$x = 3\,.\,4000 = 12000$$

Und hiernach findet man den jetzigen Vermögensbestand $= \frac{5}{3}\,.\,12000 - 375 = 20000 - 375 = 19625.$

12. In eine Erbschaft sollen sich die hinterbliebenen Kinder so theilen, daß das erste 80 Thlr. und $\frac{1}{6}$ des Restes, hierauf das zweite $2\,.\,80 = 160$ Thlr. und von dem, was nun noch übrig ist, ebenfalls $\frac{1}{6}$, u. s. f. jedes folgende Kind 80 Thlr. mehr als das vorhergehende voraus, und $\frac{1}{6}$ des alsdann noch vorhandenen Restes bekommt. Bei der Theilung findet sich, daß alle Kinder gleich viel erhalten. Wie viel erhält jedes, wie viele Kinder waren da, und wie groß war die Erbschaft?

Man übersieht leicht, daß auf die letzte Frage zuerst zu antworten ist. Nennen wir daher den Betrag der ganzen Erbschaft x, so ist der Antheil des ersten Kindes durch $80 + \frac{(x - 80)}{6}$ $= \frac{5}{6}\,.\,80 + \frac{x}{6}$ auszudrücken. Nach Abzug desselben bleibt für die fernere Theilung übrig $x - \left(\frac{5}{6}\,.\,80 + \frac{x}{6}\right) = \frac{5x}{6}$ $- \frac{5}{6}\,.\,80.$ Werden hiervon dem zweiten Kinde erst wieder $2\,.\,80$ Thlr. vorausbezahlt, so behält man noch

$$\tfrac{5}{6}x - \tfrac{5}{6}\,.\,80 - 2\,.\,80 = \tfrac{5}{6}x - \tfrac{17}{6}\,.\,80$$

und der sechste Theil dieses Restes, $\frac{5}{36}x - \frac{17}{36}\,.\,80$, zu $2\,.\,80$ Thlr. zugelegt, giebt den Antheil des zweiten Kindes

$$= 2\,.\,80 + \frac{5x}{36} - \frac{17}{36}\,.\,80 = \frac{5x}{36} + \frac{55}{36}\,.\,80.$$

Es ist nicht nöthig, auch noch den Antheil des dritten, vierten Kindes u. s. f. auszudrücken. Die beiden ersten sollen, wie überhaupt alle Kinder, gleich viel bekommen. Es muß also

$$\frac{5}{6} . 80 + \frac{x}{6} = \frac{5x}{36} + \frac{55}{36} . 80 \quad \text{sein.}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{(multipl. m. 36)} & 30 . 80 + 6x & = & 5x + 55 . 80 \\ \text{(transponirt)} & 6x - 5x & = & 55.80 - 30.80 = 25.80 \\ & x & = & 2000. \end{array}$$

Die zu theilende Erbschaft beträgt also 2000 Thlr. Hiervon erhält das erste Kind 80 Thlr. und $\frac{1}{6}$ des Restes, d. i. $\frac{1}{6}(2000 - 80) = \frac{1}{6} . 1920 = 320$, also im Ganzen 80 + 320 = 400 Thlr. Jedes andere bekommt eben so viel; es sind folglich 2000 : 400 = 5 Kinder da.

Verallgemeinerung der Aufgabe.

Anmerk. Als eine vortreffliche Uebung des Scharfsinns verdient empfohlen zu werden, die vorstehenden und ähnliche Aufgaben auch ohne Hülfe der Gleichungen zu lösen. Man wird dabei meistens auf dieselben Rechnungen geführt werden, welche die Auflösung der aus den Bedingungen der Aufgaben geformten Gleichungen verlangte. Auch wird man sich dadurch am besten von den Vortheilen der hier gelehrten Methode überzeugen, welche nur die Erfindung der Gleichung dem Scharfsinn des Rechners überläßt, die Schlüsse aber, welche zu deren Auflösung leiten, man möchte sagen, durch fast mechanische Vorschriften regelt, während ohne Hülfe derselben der Rechner nicht bloß den ganzen gegebenen Zusammenhang zwischen bekannten und unbekannten Größen in Gedanken zu behalten, sondern zugleich auch die ganze Schlußreihe, durch welche man, diesen Zusammenhang auflösend, auf den Werth der unbekannten zurückschließt, in jedem besonderen Falle wieder zu erfinden genöthigt ist. Der Unterschied beider Methoden wird sich an Beispielen, wie folgendes, leicht deutlich machen lassen: man denkt sich eine Zahl von solcher Beschaffenheit, wenn man sie mit 5 multiplicirt, zum Producte 21 addirt, die Summe durch 6 dividirt, vom Quotienten 3 subtrahirt, und den Rest zur Hälfte nimmt, so erhält man 4, welche Zahl ist nun die gedachte?

§. 50.

Auflösung einfacher Gleichungen mit zwei unbekannten Grösen.

1. Wenn gleich manche der im Anhange zum vorigen §. behandelten Aufgaben nach mehr als einer unbekannten Größe fragten, so war doch immer der Zusammenhang unter diesen Größen so klar

und bündig ausgesprochen, daß man nur eine derselben zu kennen brauchte, um aus ihrem Werthe auch die übrigen unmittelbar und geradezu (direct) berechnen zu können. Eben deßhalb brauchte man auch immer nur für eine derselben ein eigenes Zeichen einzuführen, mit dessen Hülfe sich alsdann auch alle übrigen ausdrücken ließen, und die Bedingungsgleichung konnte stets mit einer einzigen unbekannten Größe angesetzt werden. — Wird aber der Zusammenhang zwischen mehren unbekannten Größen nicht mehr geradezu und unmittelbar durch die Umstände der Aufgabe angegeben, so muß man auch für jede derselben ein eigenes Zeichen einführen, und man erhält Gleichungen mit mehren unbekannten Größen.

Wenn nun — um mit dem einfachsten Falle anzufangen — eine Gleichung zwei verschieden bezeichnete unbekannte Größen, und nach gehöriger Entwickelung jede von ihnen in demselben Gliede höchstens einmal als Factor enthält; so läßt sich nach bekannten Regeln aus derselben sowohl für die eine als für die andere unbekannte Größe ein Ausdruck finden, welcher sich bloß aus den übrigen Zahlen der Gleichung zusammensetzt, z. B. aus der Gleichung

$$7x + 3y = 75 \text{ folgt}$$
$$x = \frac{75 - 3y}{7} \text{ und } y = \frac{75 - 7x}{3}.$$

Ist dieses geschehen, so darf die Gleichung freilich in Beziehung auf jede der beiden unbekannten Größen aufgelöst genannt werden, aber nicht in dem Sinne, daß nun für jede ein bloß aus bekannten Zahlen zusammengesetzter Werth gefunden wäre. Vielmehr muß in den Ausdruck, der als Werth der einen gefunden wird, (wie auch das Beispiel zeigt), stets noch die andere unbekannte Größe wieder mit verwickelt sein. Statt dieser aber dürfen beliebige Zahlen gesetzt werden, und nur erst, wenn ihr, also überhaupt der einen von beiden unbekannten Größen, ein bestimmter, übrigens willkürlicher Werth gegeben ist, erhält auch die andere einen einzigen ganz bestimmten Werth.

Man setze z. B. in dem vorhin für x gefundenen Ausdrucke statt y nach einander die Zahlen 1, 2, 3, 4 rc., so wird $x = ?$ oder dieselben Zahlen statt x in dem Ausdrucke für y, so wird dieses $= ?$

Die eine gegebene Gleichung begründet also wohl eine bestimmte Abhängigkeit der beiden in sie aufgenommenen unbekannten Größen von einander, so daß jedem besonderen Werthe der einen auch nur ein einziger Werth der anderen entspricht, — und die Auflösung in Beziehung auf jede legt die Art und Weise, wie die eine von der anderen abhängt, noch deutlicher vor Augen; aber völlig bestimmt wird dadurch weder die eine, noch die andere.

Noch an einfacheren Beispielen, wie $x + y = 20$, $z - u = 3$ und dergleichen, zu erläutern.

Soll daher die Aufgabe, welche die gesuchten Größen der durch die Gleichung ausgesprochenen Bedingung unterwirft, nur eine einzige unzweideutige Lösung zulassen; so muß sie noch eine neue, von der ersten wesentlich verschiedene Bedingung aufstellen, welche sich ebenfalls durch eine Gleichung mit denselben beiden unbekannten Größen (und keinen außer ihnen) ausdrücken läßt. Diese zweite Gleichung muß demnach von der ersten unabhängig, d. h. nicht durch bloße Formverwandlungen aus derselben abzuleiten sein, ohne jedoch mit ihr in Widerspruch zu treten, so daß die Erfüllung der einen Bedingung die Erfüllung der anderen geradezu unmöglich macht.

2. Dieses vorausgesetzt, wenn z. B. zu der vorigen Gleichung

1) $7x + 3y = 75$ noch die neue

2) $4x - y = 32$ hinzukäme, so läßt sich nun eben sowohl aus der zweiten, wie aus der ersten ein Ausdruck für jede der beiden unbekannten Größen finden. Aus der ersten Gleichung $7x + 3y = 75$ wurde $x = \frac{75 - 3y}{7}$ und $y = \frac{75 - 7x}{3}$ gefunden, und aus der zweiten Gleichung $4x - y = 32$ ergiebt sich $x = \frac{32 + y}{4}$ und $y = 4x - 32$.

Man erhält so für dieselbe unbekannte Größe zwei verschiedene Ausdrücke, in welchen außer bekannten nur noch die zweite unbekannte Größe vorkommt. Beide müssen als Werthe der nämlichen Größe einander selbst gleich sein*); so im vorigen Beispiele

$$\frac{75-3y}{7} = \frac{32+y}{4}, \text{ weil beide Ausdrücke } = x,$$

und $$\frac{75-7x}{3} = 4x - 32, \text{ weil beide Ausdrücke } = y \text{ sein}$$

sollen.

Die Gleichungen, welche durch diese Zusammenstellung entstehen, können folglich nur noch eine unbekannte Größe enthalten, und die Methode der Auflösung solcher Gleichungen darf als bekannt angesehen werden. So findet sich im vorigen Beispiele aus der

Gleichung $$\frac{75-3y}{7} = \frac{32+y}{4}$$

$$y = 4$$

und aus der Gleichung $$\frac{75-7x}{3} = 4x - 32$$

$$x = 9.$$

Ueberhaupt also kommt zunächst Alles darauf an, **aus den beiden gegebenen Gleichungen eine neue abzuleiten, in welcher nur noch eine unbekannte Größe vorkommt.** Weil zu dem Ende die andere unbekannte Größe verdrängt werden muß, so nennt man das hierauf abzielende Verfahren die **Elimination** der einen unbekannten Größe.

Das so eben durch ein Beispiel erläuterte Verfahren, jenen Zweck zu erreichen, besteht darin, **daß man jede der gegebenen Gleichungen in Beziehung auf dieselbe unbekannte Größe auflöst, und die beiden für sie erhaltenen Ausdrücke einander gleich setzt.** Man nennt dieses Verfahren das der **Combination.**

Um es allgemein darzustellen, nehmen wir die beiden Gleichun-

*) Es mag hier gelegentlich bemerkt werden, daß dieser Schluß auf dem allgemeinen Grundsatze (**Axiome**) beruht, daß zwei Größen, die einer dritten gleich sind, einander selbst gleich sein müssen.

gen 1) $ax + by = c$
und 2) $dx - ey = f$ an. Aus der ersten findet man

$$x = \frac{c-by}{a} \text{ und } y = \frac{c-ax}{b},$$

aus der zweiten $x = \frac{f+ey}{d}$ und $y = \frac{dx-f}{e}$,

und durch Combination der beiden Ausdrücke für x oder y

$$[x =] \ \frac{c-by}{a} = \frac{f+ey}{d},$$

$$[y =] \ \frac{c-ax}{b} = \frac{dx-f}{e}.$$

Andere Beispiele.

3. Außer dem vorigen giebt es aber auch noch andere Wege, aus zwei gegebenen Gleichungen mit zwei (oder mehren) unbekannten Größen eine derselben zu eliminiren. Es reicht hin, noch zwei derselben, und zwar die bequemsten und deßhalb gebräuchlichsten, näher zu bezeichnen.

Das zunächst sich darbietende Verfahren ist folgendes. Man löst eine der gegebenen Gleichungen in Beziehung auf die fortzuschaffende unbekannte Größe auf, und setzt den für sie gefundenen Ausdruck in der anderen Gleichung überall statt ihres Zeichens an die Stelle. Man nennt diese Methode der Elimination einer unbekannten Größe aus zwei Gleichungen die der Substitution.

So erhielt man, um bei dem vorhin gebrauchten Beispiele stehen zu bleiben, aus der Gleichung

$$7x + 3y = 75$$

$$x = \frac{75-3y}{7} \text{ und } y = \frac{75-7x}{3},$$

und substituirt man die gefundenen Werthe für x oder y in der zweiten Gleichung

$$4x - y = 32, \text{ so geht diese}$$

entweder in $4 \cdot \frac{75-3y}{7} - y = 32,$

oder in $4x - \frac{75-7x}{3} = 32$ über.

Eben so gut hätte man auch aus der zweiten Gleichung Werthe für x oder y ableiten und diese in der ersten substituiren können.

Auszuführen.

Werden, um auch diese zweite Methode allgemeiner darzustellen, wieder die Gleichungen

$$1)\quad ax + by = c$$

und $\quad 2)\quad dx - ey = f$ angenommen, so ergiebt sich aus der ersten

$$x = \frac{c - by}{a} \text{ und } y = \frac{c - ax}{b},$$

und durch Substitution des für x oder für y gefundenen Ausdrucks in der zweiten Gleichung

entweder $\quad d\,.\,\frac{c - by}{a} - ey = f,$

oder $\quad dx - e\,.\,\frac{c - ax}{b} = f.$

Jede der abgeleiteten Gleichungen enthält, wie verlangt wird, nur noch eine unbekannte Größe.

Auch hier wieder dürfte x oder y zuerst aus der zweiten Gleichung bestimmt, und der gefundene Ausdruck in der ersten substituirt werden.

Auszuführen.

Bei der wirklichen Anwendung dieser Methode wählt man natürlich den Weg, welcher auf die einfachsten Ausdrücke führt.

Wonach läßt sich in der Regel zum Voraus beurtheilen, welcher von den vier gleich zulässigen Wegen der bequemste sein wird?

Zur ferneren Einübung dieser Methode sind dieselben Beispiele, wie bei der Methode der Combination, zu gebrauchen.

4. Die dritte Methode endlich, aus zwei gegebenen Gleichungen eine ihrer unbekannten Größen zu eliminiren, fließt aus einer ganz besonderen Voraussetzung her.

Wenn nach gehöriger Entwickelung beider Gleichungen in jeder allemal solche Glieder, welche dieselbe unbekannte Größe enthalten (nach vorgängiger Transposition, wenn es nöthig ist), in ein einziges zusammengezogen werden, so kann der Fall eintreten, daß eins dieser Glieder an sich in der einen Gleichung vollkommen das nämliche ist, wie in der anderen. Alsdann leuchtet ein, daß dieses Glied, jenachdem es in beiden Gleichungen entgegengesetzte oder gleiche Zeichen vor sich hat, entweder durch Addition der beiden Seiten, wo es steht, oder durch Subtraction der einen von der anderen, und mit ihm zugleich die darin eingeschlossene unbekannte Größe aufgehoben werden würde.

Man addire also im ersten Falle, wie jene beiden Seiten, welche das fortzuschaffende Glied enthalten, so auch die beiden anderen Seiten der gegebenen Gleichungen, oder man subtrahire im zweiten Falle — die Seiten nach demselben Merkmale unterschieden — jede Seite der einen von der entsprechenden Seite der anderen Gleichung: so sind die beiden Summen im ersten, die Differenzen im zweiten Falle, als Summen und Differenzen gleicher Größen, einander selbst wieder gleich, und aus der neuen Gleichung verschwindet die unbekannte Größe, welche dem aufgehobenen Gliede angehörte.

So entspringt z. B. aus den beiden Gleichungen

1) $7x + 3y = 75$ und aus 1) $7x + 3y = 75$
und 2) $\underline{4x - 3y = 24}$ und 2) $\underline{4x + 3y = 48}$
durch Addition $11x = 99$, durch Subtraction $3x = 27$,
oder $-3x = -27$;

oder in allgemeinerer Form:

aus 1) $ax + by = c$ und aus 1) $fx \mp gy = h$
und 2) $\underline{dx - by = e}$ und 2) $\underline{kx \mp gy = m}$
durch Add. $ax + dx = c + e$, durch Sbtr. $fx - kx = h - m$,
oder $kx - fx = m - h$.

Welcher Vorbereitungen bedürfte es, um auch in der zweiten Voraussetzung durch Addition beider Gleichungen, oder auch in der ersten durch Subtraction der einen Gleichung von der anderen den beabsichtigten Zweck zu erreichen? — (S. §. 48. 3.)

Diese Methode, eine unbekannte Größe aus zwei Gleichungen — um es kurz zu bezeichnen — durch Addition oder Subtraction derselben zu eliminiren, würde indessen nur von geringem Nutzen sein, wenn sie bloß in solchen Fällen angewandt werden könnte, wo ihre Voraussetzungen sich von selbst oder zufällig erfüllt zeigen. — Es sollen in jeder der beiden Gleichungen, nachdem sie gehörig entwickelt sind, alle diejenigen Glieder, welche dieselbe unbekannte Größe als Factor enthalten, in ein einziges zusammengezogen sein, und eins dieser Glieder in der einen soll mit einem Gliede in der anderen Gleichung völlig übereinstimmen. Allein nur in sehr seltenen Fällen möchte sich eine solche Uebereinstimmung freiwillig einstellen. Um daher unsere Methode allgemein anwendbar zu machen, muß es möglich sein, je zwei Glieder, welche, verschiedenen Gleichungen angehörend, die fortzuschaffende unbekannte Größe ausschließlich an sich gezogen haben, nach Belieben in Uebereinstimmung zu bringen.

Dieß geht immer an, wenn in jedem dieser Glieder die fortzuschaffende unbekannte Größe nur einmal als Factor vorkommt. Alsdann ist ihr Coefficient, der andere Factor des Gliedes, bloß aus bekannten oder aus solchen und den übrigen unbekannten Größen zusammengesetzt. Damit nun dieser in beiden Gleichungen derselbe werde, braucht man nur jede (d. h. alle ihre Glieder) mit dem Coefficienten der fortzuschaffenden unbekannten Größe in der anderen Gleichung zu multipliciren (§. 48. 4). Nachdem dieses geschehen, und dadurch das Product aus beiden Coefficienten, also dieselbe Zahl, zum neuen Coefficienten der fortzuschaffenden unbekannten Größe in beiden Gleichungen gemacht worden ist, tritt übrigens wieder das vorhin beschriebene Verfahren ein.

Soll z. B. (um das früher gebrauchte Beispiel wieder aufzunehmen) aus den Gleichungen 1) $7x + 3y = 75$
und 2) $4x - y = 32$

auf dem angezeigten Wege y eliminirt werden; so braucht man nur, da der Coefficient desselben in der ersten 3, in der zweiten 1 ist, die zweite Gleichung mit 3 zu multipliciren. Man erhält also die beiden Gleichungen:

$$\begin{array}{lrcl} & 1)\ \ 7x + 3y &=& 75 \\ & 2)\ \ 12x - 3y &=& 96, \\ \hline \text{und durch Addition derselben} & 19x &=& 171 \end{array}$$

Um aus denselben Gleichungen x fortzuschaffen, müßte zuvor die erste mit 4, die zweite mit 7 multiplicirt werden; man erhält dadurch

$$\begin{array}{lrcl} & 1)\ \ 28x + 12y &=& 300 \\ \text{und} & 2)\ \ 28x - 7y &=& 224, \\ \hline \text{und daraus} & 19y &=& 76, \end{array}$$

wenn die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt wird.

Um das Verfahren allgemeiner darzustellen, dürfen ebenfalls die früher (Nro. 2 und 3) gebrauchten Gleichungen

$$\begin{array}{lr} & 1)\ \ ax + by = c \\ \text{und} & 2)\ \ dx - ey = f \end{array}$$

beibehalten werden, da sie bereits die Form haben, in welche immer erst die gegebenen Gleichungen gebracht sein sollten.

Um aus ihnen y zu eliminiren, muß man die erste mit e, die zweite mit b multipliciren, und die erhaltenen Gleichungen

$$\begin{array}{lr} & 1)\ \ aex + bey = ce \\ \text{und} & 2)\ \ bdx - bey = bf \end{array}$$

addiren, wodurch die neue

$$aex + bdx = ce + bf$$

entsteht.

Um x zu eliminiren, muß die erste mit d, die zweite mit a multiplicirt, und hernach die eine von der anderen subtrahirt werden, also

$$\begin{array}{lrcl} & 1)\ \ adx + bdy &=& cd \\ \text{subtrahirt} & 2)\ \ adx - aey &=& af \\ \hline \text{giebt} & bdy + aey &=& cd - af. \end{array}$$

Enthalten die Coefficienten der fortzuschaffenden unbekannten Größe einen gleichen Factor, (der auch selbst schon ein Product mehrer anderer sein kann); so braucht man nur, um sie in völlige Uebereinstimmung zu bringen, jede Gleichung mit demjenigen Factor zu multipliciren, welchen der Coefficient in der anderen Gleichung noch außer dem gemeinschaftlichen enthält. Sollen z. B. die Gleichungen

$$1)\quad 11x - 30y = n$$
und $$2)\quad 7x - 24y = c$$
zur Elimination des y vorbereitet werden, dessen Coefficienten 30 und 24, aufgelöst $5 \cdot 6$ und $4 \cdot 6$, den Factor 6 mit einander gemein haben, so braucht man nur die erste mit 4, die zweite mit 5 zu multipliciren. Die abgeleiteten Gleichungen
$$1)\quad 44x - 120y = 4n$$
und $$2)\quad 35x - 120y = 5c$$ haben die gewünschte Form: der Coefficient des y ist in beiden das Product $4.5.6 = 120$.

Dieselben Beispiele, an welchen das Verfahren der Combination und Substitution geübt ist, sind auch zur Erläuterung dieser dritten Methode beizubehalten.

Anmerk. Das Verfahren, zwei Gleichungen zur Elimination einer unbekannten Größe durch Addition oder Subtraction vorzubereiten, obgleich vorerst nur auf den Fall beschränkt, daß jene unbekannte Größe in jedem der beiden Glieder, auf welche sie sich zurückgezogen hat, nur einmal als Factor vorkomme, bleibt auch dann noch anwendbar, wenn in denselben die fortzuschaffende unbekannte Größe zwar öfter, aber in beiden gleich oft für sich allein als Factor, und auch wenn sie mit in zusammengesetzten Factoren vorkommt, sofern diese letzteren, nach Absonderung aller ihren Theilen etwa gemeinschaftlichen Factoren, in beiden Gliedern vollständig übereinstimmen — überhaupt also, wenn diese Glieder, in zwei Arten von Factoren zerlegt, solche, die von der fortzuschaffendeu unbekannten Größe abhängen, und solche, die von derselben nicht abhängen, in Beziehung auf jene völlig übereinstimmen und nur in Beziehung auf die letzteren von einander verschieden sind.

An folgenden Beispielen, wenn y als die fortzuschaffende unbekannte Größe angesehen wird, zu erläutern:

I. $\begin{cases} 1)\ 4x + 3yy = 60 \\ 2)\ \ \ x - yy = 8 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 1)\ 5x - 2y(x-y) = 11 \\ 2)\ 3x - \frac{1}{4}xy(x-y) = 0 \end{cases}$

III. $\begin{cases} 1)\ 4x + 3yy = 60 \\ 2)\ xx + y = 146 \end{cases}$ IV. $\begin{cases} 1)\ x + 5y(y-3) = 351 \\ 2)\ 2xx + 5y = 37 \end{cases}$

5. Nachdem nun durch eine der drei beschriebenen Methoden aus den beiden gegebenen Gleichungen eine neue abgeleitet ist, welche eine unbekannte Größe weniger, also nur noch eine enthält, hängt die Lösung der Aufgabe von der Auflösung dieser Gleichung

ab. Bewährt sie sich, nach gehöriger Entwickelung und Vereinfachung, sofern diese Operationen nöthig sind, als eine einfache, so ist jedenfalls ihre Auflösung nach den im vorigen §. gegebenen Regeln zu bewerkstelligen. Auf diese Voraussetzung sind aber vorerst alle Regeln der Algebra beschränkt.

Gleichungen mit zwei unbekannten Größen sollen demnach einfache heißen, wenn die aus ihnen durch Elimination der einen oder anderen unbekannten Größe abgeleitete Gleichung einfach ist. Dieser Fall tritt unfehlbar ein, wenn die gegebenen Gleichungen in entwickelter Gestalt kein Glied enthalten, welches mehr als einen unbekannten Factor in sich schließt*).

Weßhalb?

Ist aber durch die Auflösung der abgeleiteten Gleichung der Werth der einen unbekannten Größe gefunden, so läßt sich in der Regel am kürzesten auch die zweite bestimmen, wenn man jenen Werth statt des gleichgeltenden Zeichens in einer der Gleichungen substituirt, welche noch beide unbekannte Größen enthalten, und dieselbe, falls sie dadurch nicht von selbst als aufgelöst erscheint, ebenfalls auflöst. — Man kann aber auch aus den gegebenen Gleichungen durch Elimination der zuerst bestimmten unbekannten Größe erst wieder eine neue ableiten, welche nur noch die zweite unbekannte Größe enthält, und nun auch diese auflösen.

Das eine wie das andere Verfahren ist zur endlichen Auflösung der beispielsweise gebrauchten Gleichungen 1) $7x + 3y = 75$
und 2) $4x - y = 32$
anzuwenden, indem nach einander die durch die erste, zweite und dritte Eliminationsmethode abgeleiteten Gleichungen zur Bestimmung der ersten unbekannten Größe genommen werden. — Es muß immer $x = 9$ und $y = 4$ gefunden werden.

Ebenso sind die Gleichungen 1) $ax + by = c$
und 2) $dx - ey = f$
mit Beziehung auf die bereits durch alle drei Methoden aus ihnen abgeleiteten Gleichungen vollständig aufzulösen. — Es muß immer $x = \frac{ce + bf}{ae + bd}$ und $y = \frac{cd - af}{ae + bd}$ gefunden werden.

*) Aber auch noch in anderen Voraussetzungen, wie das im Anhange Nro. 5 behandelte Beispiel beweist.

Anhang. Auflösung einiger Aufgaben, welche auf einfache Gleichungen mit zwei unbekannten Größen führen.

1. Einen Bruch von solcher Beschaffenheit zu finden, daß sein Werth $= \frac{2}{3}$ wird, wenn man Zähler und Nenner zugleich um 5 Einheiten vermehrt, und nur $\frac{1}{3}$ beträgt, wenn man Zähler und Nenner um 4 Einheiten vermindert.

Offenbar müssen Zähler und Nenner des gesuchten Bruchs jeder für sich bestimmt, und da ihr Zusammenhang nicht direct angegeben ist, durch besondere Zeichen dargestellt werden. Der Zähler heiße x, der Nenner y, mithin der gesuchte Bruch $\frac{x}{y}$, so werden die in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen durch folgende beide Gleichungen ausgedrückt:

$$1)\ \frac{x+5}{y+5} = \frac{2}{3} \text{ und } 2)\ \frac{x-4}{y-4} = \frac{1}{3}.$$

Die Entwickelung derselben giebt:

1) $3x + 15 = 2y + 10$ und 2) $3x - 12 = y - 4$,

in mehr zusammengezogener Form:

1) $3x + 5 = 2y$ und 2) $3x - 8 = y$.

Die zweite Gleichung zeigt sich nun von selbst in Beziehung auf y aufgelöst: substituirt man dessen Werth in der ersten Gleichung, so verwandelt sich diese in

$$3x + 5 = 2(3x - 8) = 6x - 16,$$

und aus ihr ergiebt sich $x = 7$. Wird dieser Werth in der Gleichung $3x - 8 = y$ statt x gesetzt, so erhält man:

$$y = 3 . 7 - 8 = 21 - 8 = 13.$$

Also ist der gesuchte Bruch $\frac{7}{13}$.

Die Richtigkeit der Auflösung ist durch die Probe zu bestätigen.

Eben so leicht läßt sich aus den entwickelten Gleichungen durch die Methode der Combination x eliminiren, indem man aus der ersten $3x = 2y - 5$, aus der zweiten $3x = y + 8$ findet, und nun die beiden Werthe für $3x$, (da es hier offenbar überflüssig sein würde, aus ihnen noch erst die Werthe für x selbst abzuleiten,) einander gleich setzt:

$$2y - 5 = y + 8, \text{ woraus, wie vorhin,}$$
$$y = 13 \text{ folgt.}$$

Am schnellsten aber würde man zum Ziele kommen, wenn man die Methode der Addition und Subtraction anwendete, da das mit x behaftete Glied in beiden Gleichungen freiwillig übereinstimmt. Denn

$$\begin{array}{rl} \text{von} & 3x + 5 = 2y \\ \text{subtrahirt} & \underline{3x - 8 = y,} \\ \text{erhält man unmittelbar} & 13 = y. \end{array}$$

Wie berechnet sich x, wenn auf die eine oder andere Weise zuerst y gefuuden ist?

Verallgemeinerung der Aufgabe, so daß sie auf die Gleichungen

$$\frac{x+a}{y+a} = \frac{c}{d} \text{ und } \frac{x-b}{y-b} = \frac{m}{n} \text{ führt;}$$

Auflösung dieser Gleichungen und Nachweisung der Uebereinstimmung in den Resultaten, wenn in den Auflösungsformeln statt der allgemeinen Zeichen die bestimmten Werthe der vorigen Aufgabe gesetzt werden.

2. **Wenn 40 Pariser Fuß und 5 Meter zusammen 57,331... Preußische (oder Rheinländische) Fuß ausmachen, und 100 Pariser Fuß 1,542... Preußische Fuß mehr betragen, als 32 Meter; in welchem Verhältniß stehen hiernach der Pariser Fuß und das Meter zum Preußischen Fuß?**

Nennt man die Zahl, welche angiebt, wie viele Preuß. Fuß 1 Par. Fuß beträgt, x, und diejenige, welche in gleicher Weise das Verhältniß des Meters zum Preußischen Fuß bestimmt, y; so ergeben sich aus den Voraussetzungen der Aufgabe die beiden Gleichungen:

$$\begin{array}{rrl} & 1) & 40x + 5y = 57{,}331.. \\ \text{und} & 2) & 100x = 32y + 1{,}542.. \\ \text{oder} & & 100x - 32y = 1{,}542.. \end{array}$$

Um aus ihnen durch die Methode der Addition oder Subtraction (welche hier wie in vielen Fällen den Vorzug verdient) x fortzuschaffen, multiplicirt man die erste mit 5, die zweite mit 2, (da die beiden Coefficienten des x, $40 = 2 . 20$ und $100 = 5 . 20$, den Factor 20 mit einander gemein haben,) und subtrahirt die zweite der umgeformten Gleichungen von der ersten; also:

$$\begin{array}{rrl} & 1) & 200x + 25y = 286{,}655.. \\ \text{subtrahirt} & 2) & \underline{200x - 64y = 3{,}084..} \\ & \text{giebt} & 89y = 283{,}57... \\ & \text{folglich} & y = 3{,}186.. \end{array}$$

Um auf demselben Wege y zu eliminiren, multiplicirt man die erste Gleichung mit 32, die zweite mit 5, und addirt darauf beide:

$$\begin{array}{lrcr} 1) & 1280x + 160y & = & 1834{,}59.. \\ 2) & 500x - 160y & = & 7{,}71.. \\ \hline \text{die neue} & 1780x & = & 1842{,}30.. \\ \text{aufgelöst giebt} & x & = & 1{,}035.. \end{array}$$

Auf einen Wechsel von 100 Pfund Sterling hat man 119 Louisd'or und $\frac{2}{3}$ Thaler erhalten, und ein anderes Mal bei denselben Coursen für 50 Louisdor einen Wechsel zum Belauf von 40 Pfund Sterling und noch 13 Thaler 8 Sgr. erhalten; wie hoch (zu wie viel Thalern) ist der Louisd'or und das Pfund Sterling gerechnet?

3. **Um ungefähr zu bestimmen, wie viele Bogen eine Schrift im Druck einnehmen wird, nimmt man an, daß im Durchschnitt die Seite eine gewisse Menge von Zeilen, und die Zeile eine gewisse Anzahl von Buchstaben enthalten solle. Man hat berechnet, daß, wenn auf die Seite 4 Zeilen, und in die Zeile 6 Buchstaben mehr genommen würden, die ganze Seite 416 Buchstaben mehr enthalten würde, und daß es gleichviel wäre, ob man der Seite 5 Zeilen (bei unveränderter Buchstabenmenge der Zeile) oder nur 2 Zeilen und zugleich der Zeile 5 Buchstaben abbräche. — Wie viele Zeilen sollten demnach auf die Seite, und wie viele Buchstaben in jede Zeile kommen?**

Die beiden Zahlen, nach welchen gefragt wird, dürfen unmittelbar als die gesuchten in die anzusetzenden Gleichungen eingeführt werden. Man nenne die Menge von Zeilen, welche die Seite erhalten soll, x, und die Menge von Buchstaben in der Zeile y, so bestimmt das Product dieser Zahlen, xy, die Menge von Buchstaben, welche auf die Seite gehen. Bei einer Vermehrung der ersten Zahl (x) um 4, der zweiten (y) um 6 vermehrt sich die Menge aller Buchstaben auf der Seite um 416, also ist

$$1) \quad (x + 4).(y + 6) = xy + 416.$$

Vermindert man dagegen die Zahl der Zeilen um 2, und der Buchstaben in der Zeile um 5, so ist die Buchstabenmenge der Seite durch das Product $(x - 2).(y - 5)$ auszudrücken, und diese soll eben so groß sein, als wenn man bei unveränderter Buchstabenmenge der Zeile von der Seite 5 Zeilen abbräche, wodurch die Menge ihrer Buchstaben auf $(x - 5) \cdot y$ herabkäme; also ist

$$2) \quad (x - 2) \cdot (y - 5) = (x - 5) \cdot y.$$

Entwickelt heißen diese Gleichungen

$$1) \quad xy + 4y + 6x + 24 = xy + 416$$

und $$2) \quad xy - 2y - 5x + 10 = xy - 5y,$$

und nach Aufhebung und Zusammenziehung gleichartiger Glieder

$$1) \quad 4y + 6x = 392 \text{ (oder } 2y + 3x = 196)$$

und $$2) \quad 3y - 5x = -10.$$

Durch die Methode der Combination findet man aus ihnen

$$[y =] \frac{196 - 3x}{2} = \frac{5x - 10}{3},$$

und durch Auflösung dieser Gleichung

$$x = 32,$$

und durch Substitution dieses Werthes in einen der Ausdrücke für y

$$y = 50.$$

Die obigen Gleichungen sind auch durch die Methode der Substitution und der Addition und Subtraction aufzulösen.

4. Zwei Körper, deren spezifisches Gewicht s und s' ist, wiegen zusammen a Lothe (Pfunde, Grammen oder andere Gewichtseinheiten). Werden sie zusammen unter Wasser abgewogen, so verliert ihr Gewicht p Lothe (Pfunde, Grammen oder überhaupt eben solche Gewichtseinheiten, nach welchen ihr absolutes Gewicht [a] bestimmt ist). Wie läßt sich aus diesen Angaben das Gewicht des einen und andern Bestandtheils des zusammengesetzten Körpers finden?

Unter dem spezifischen Gewichte eines Körpers versteht man bekanntlich die Angabe, wie viel mal jede beliebige Menge desselben schwerer oder leichter ist, als ein gleich großes Volumen reines Wasser (bei einer bestimmten Temperatur). Ebenso darf als bekannt vorausgesetzt werden, daß jeder Körper, in Wasser (oder irgend eine andere Flüssigkeit) eingetaucht, so viel an Gewicht verliert (einen eben so starken, aufwärts gerichteten Druck erfährt), als das aus seinem Raume verdrängte, also dem Volumen nach gleiche, Wasserquantum wiegt*). Dieser Gewichtsverlust, mit dem spezifischen Gewichte des Körpers multiplicirt, würde demnach das absolute Gewicht desselben geben: umgekehrt also, wenn man sein absolutes Gewicht durch das spezifische Gewicht dividirt, muß der Quotient den Gewichtsverlust, welchen der Körper erfährt, wenn er in Wasser eingetaucht wird, oder das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser, bestimmen.

Bezeichnen wir also in der vorigen Aufgabe das Gewicht des ersten Körpers durch x, das des zweiten durch y; so ist der Gewichtsverlust des ersten beim Eintauchen unter Wasser $= \frac{x}{s}$, der des zweiten $= \frac{y}{s'}$, und die Voraussetzungen werden durch die beiden Gleichungen

$$1)\quad x + y = a$$

und $$2)\quad \frac{x}{s} + \frac{y}{s'} = p$$ ausgedrückt.

Durch Entwickelung der zweiten erhält man:

$$s'x + sy = pss',$$

ferner die erste mit s oder s' multiplicirt:

$$\begin{array}{rlcl} & sx + sy = as & \text{oder} & s'x + s'y = as' \\ \text{subtrahirt:} & s'x + sy = pss' & „ & s'x + sy = pss' \\ \hline & (s - s')x = (a - ps')s, & & (s' - s)y = (a - ps)s'; \end{array}$$

also $x = \frac{(a - ps') \cdot s}{s - s'}$ und $y = \frac{(a - ps) \cdot s'}{s' - s}$.

Hiernach die Lösung folgender Aufgabe: Ein vollständig geschlossenes und mit Weingeist gefülltes Glasgefäß wiegt in der Luft 5,25 Gramme, unter Wasser abgewogen aber nur 1,79 Gr.; das spezifische Gewicht des Glases ist 2,5, des Weingeistes 0,8; wie viel Weingeist faßt das Gefäß? — Die Auflösung ist ursprünglich und auch durch Substitution der hier gegebenen Zahlen statt der entsprechenden Buchstaben in den vorigen allgemeinen Auflösungsformeln zu machen.

5. **Eine (nicht chemische) Composition von zwei verschiedenen Substanzen enthält a Lothe** (oder

---

*) Die Entdeckung dieses hydrostatischen Gesetzes und seine erste Anwendung zur Lösung der vorliegenden Aufgabe wird in einer bekannten Erzählung dem Archimedes zugeschrieben.

andere Gewichtseinheiten) der ersten, b Lothe der zweiten, und verliert, unter Wasser abgewogen, p Lothe. Eine zweite Composition derselben Substanzen enthält a' Lothe der ersten, b' Lothe der zweiten, und verliert im Wasser p' Lothe. Man soll hiernach das spezifische Gewicht der ersten und zweiten Substanz bestimmen.

Nach den Erörterungen, welche bei der vorigen Aufgabe gegeben sind, werden diese Voraussetzungen, unter s und s' die gesuchten spezifischen Gewichte verstanden, durch die beiden Gleichungen

$$1)\quad \frac{a}{s} + \frac{b}{s'} = p$$

$$2)\quad \frac{a'}{s} + \frac{b'}{s'} = p' \quad \text{ausgedrückt.}$$

Nach gewohnter Weise würde man dieselben zuerst entwickeln, wodurch sie in

$$1)\quad as' + bs = pss'$$

$$\text{und}\quad 2)\quad a's' + b's = p'ss' \quad \text{übergingen.}$$

Um alsdann eine der unbekannten Größen, z. B. s', etwa durch die Methode der Addition oder Subtraction zu eliminiren, müßte man diejenigen Glieder jeder Gleichung, welche jene Größe enthalten, in ein einziges zusammenziehen, also:

$$1)\quad (a - ps)s' + bs = 0$$

$$2)\quad (a' - p's)s' + b's = 0,$$

darauf die erste Gleichung mit $(a' - p's)$, die zweite mit $(a - ps)$ multipliciren, und hernach die eine von der anderen subtrahiren. Also:

$$\begin{array}{rl}
 & 1)\ (a - ps).(a' - p's)s' + b(a' - p's)s = 0 \\
\text{subtrahirt} & 2)\ (a - ps).(a' - p's)s' + b'(a - ps)s = 0 \\
\hline
\text{giebt} & b(a' - p's).s - b'(a - ps).s = 0 \\
\text{[dividirt durch s*)]} & b(a' - p's) - b'(a - ps) = 0 \\
\text{[entwickelt]} & a'b - bp's - ab' + b'ps = 0 \\
\text{[aufgelöst]} & s = \dfrac{ab' - a'b}{b'p - bp'}.
\end{array}$$

Auf entsprechende Art oder auf dem einen oder anderen sonst

*) Vergl. §. 49. 1, c.

bezeichneten Wege läßt sich auch s' finden. Am leichtesten gelangt man dazu, wenn man nur in dem für s gefundenen Ausdrucke a und a' mit b und b' vertauscht, und umgekehrt, da mit dieser Verwechslung auch schon in den anfänglichen Gleichungen s' ganz in die Verhältnisse von s tritt. Hierdurch wie auf jede andere Weise erhält man $s' = \frac{b a' - b' a}{a' p - a p'}$.

Es leuchtet aber ein, daß im vorliegenden Falle die eine wie die andere unbekannte Größe noch bequemer eliminirt werden kann, wenn man die Gleichungen 1) $\frac{a}{s} + \frac{b}{s'} = p$ und 2) $\frac{a'}{s} + \frac{b'}{s'} = p'$ in ihrer anfänglichen Form läßt, ohne sie zu entwickeln, und nur die Brüche, deren Nenner die fortzuschaffende unbekannte Größe enthalten, in Uebereinstimmung bringt, um nachher die eine Gleichung von der anderen zu subtrahiren. So erhält man z. B. die erste mit b', die zweite mit b multiplicirt:

$$1)\quad \frac{ab'}{s} + \frac{bb'}{s'} = b'p$$

$$2)\quad \frac{a'b}{s} + \frac{bb'}{s'} = bp'$$

und daraus $\frac{ab'}{s} - \frac{a'b}{s} = b'p - bp'$,

folglich $ab' - a'b = (b'p - bp')s$

und $s = \frac{ab' - a'b}{b'p - bp'}$, wie vorhin.

Man könnte auch, um das Ungewohnte dieser Formen ganz zu vermeiden, zuerst $\frac{1}{s} = x$ und $\frac{1}{s'} = y$ setzen, wodurch die anfänglichen Gleichungen in die neuen

$$ax + by = p \text{ und } a'x + b'y = p'$$

übergingen, alsdann x und y, und durch Umkehrung ihrer Werthe $s\left(= \frac{1}{x}\right)$ und $s'\left(= \frac{1}{y}\right)$ bestimmen.

Auszuführen.

Anwendung des zuletzt gelehrten Verfahrens auf ähnliche Beispiele, als: 1) $\frac{30}{x} + \frac{5}{2y} = 6\frac{1}{2}$ und 2) $\frac{25}{x} - \frac{5}{3y} = 4\frac{2}{3}$ u. a.

Substitution bestimmter Werthe statt der Buchstaben a, b, p, a', b', p' in der vorigen Aufgabe.

Vielfache Uebungen in der Auflösung gegebener Gleichungen mit zwei unbekannten Größen und mannigfaltig eingekleideter Aufgaben, welche auf solche Gleichungen führen.

Die Aufgabe, aus $x + y = a$ und $x - y = b$ sowohl x als y zu finden, und die Auflösung dieser Aufgabe in Worten auszudrücken.

Anmerk. Es ist auf den ersten Blick klar und bedarf daher keiner umständlicheren Nachweisung, weßhalb oben (im §. Nro. 1) die Bedingung gemacht werden mußte, daß die beiden Gleichungen, aus welchen man auf die Werthe der beiden in sie verflochtenen unbekannten Größen schließen soll, weder von einander abhängen, noch in Widerspruch mit einander stehen dürfen. Indessen ist es nicht uninteressant, zu untersuchen, zu welchen Folgerungen die bisher erläuterten Auflösungsmethoden führen würden, wenn man sie auch noch auf solche Fälle anwenden wollte, wo jene Bedingung nicht erfüllt ist.

Zwei Gleichungen sind von einander abhängig, wenn sich die eine durch bloße Formverwandlungen aus der anderen ableiten oder auf dieselbe zurückführen läßt. Um zu beurtheilen, ob dieß bei Gleichungen, wie wir sie hier als gegeben voraussetzen, der Fall sei, bringe man sie in die entsprechenden Formen

$$1)\quad ax + by = c$$
$$\text{und}\quad 2)\quad a'x + b'y = c'.$$

Zeigte es sich nun, daß $a' = ma$, $b' = mb$ und $c' = mc$, — unter m, wie auch unter a, b und c jede beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl verstanden, — mithin daß die zweite Gleichung $max + mby = mc$ wäre; so ist klar, daß sie durch Division mit m ganz auf die erste zurückgebracht werden würde. Man hätte also eigentlich nur die eine Gleichung $ax + by = c$, und daß aus ihr allein weder für x noch für y nur ein einziger bestimmter Werth hergeleitet werden könne, ist schon früher gezeigt worden. Hätte man indessen den Umstand übersehen, daß die beiden Gleichungen $ax + by = c$ und $max + mby = mc$ von einander abhängen oder im Wesentlichen mit einander übereinstimmen, oder wollte man ihn absichtlich nicht beachten und auf gewohnte Weise die Auflösung bewerkstelligen; so würde man durch die beiden ersten Methoden der Combination oder Substitution auf identische Gleichungen (z. B.

$\frac{c - ax}{b} = \frac{mc - max}{mb}$ oder $m.(c - by) + mby = mc$) und durch deren Auflösung auf den Schluß, daß $x = x$ oder $y = y$, oder $0 = 0$ sei, und durch die dritte Methode der Addition oder Subtraction unmittelbar zu dem Schlusse $0 = 0$ geführt werden. Löst man aber zuerst die Gleichungen $ax + by = c$ und $a'x + b'y = c'$ auf, wodurch $x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$ und $y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}$ gefunden wird, und setzt nun in diesen Ausdrücken statt a', b', c' ihre Werthe ma, mb und mc; so erhält man $x = \frac{mbc - bmc}{amb - mab} = \frac{0}{0}$ und $y = \frac{mac - amc}{mab - amb} = \frac{0}{0}$.

Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ bezeichnet aber schlechterdings nichts Bestimmtes; denn er verlangt eine Größe, die mit 0 multiplicirt 0 zum Producte giebt, und das thut jede Größe.

Durch alle diese nichts sagenden Resultate bestätigt die Rechnung nur, was man sich auch schon im Voraus sagen konnte, daß nämlich eine einzige Gleichung zur Bestimmung von zwei in ihr vorkommenden unbekannten Größen nicht hinreiche.

Um zweitens zu untersuchen, ob und auf welche Art ein Widerspruch zwischen den gegebenen Gleichungen durch die vorigen Auflösungsmethoden aufgedeckt wird, haben wir zunächst zu bestimmen, worin derselbe besteht. Nehmen wir zu dem Ende an, die beiden Gleichungen seien wieder in die Form $ax + by = c$ und $a'x + b'y = c'$ gebracht; so findet ein W i d e r s p r u c h zwischen ihnen statt, wenn bei freiwilliger oder durch Multiplication der einen Gleichung mit dem geeigneten Factor herbeizuführender Uebereinstimmung der ersten Seiten (welche die unbekannten Größen enthalten) die gegenüberstehenden Seiten verschieden sind, — also, wenn $a' = a$, $b' = b$ und c' von c verschieden, oder wenn $a' = ma$, $b' = mb$ und c' von mc verschieden ist. Zwei einander widersprechende Gleichungen können also allgemein unter den Formen 1) $ax + by = c$

und 2) $ax + by = d$

oder $max + mby = md$

dargestellt werden, wenn c und d als von einander verschieden angenommen werden. Es würde unmittelbar aus ihnen folgen, daß $c = d$ sein müßte, wovon eben das Gegentheil angenommen ist. Die Methode der Combination und Substitution führt auf denselben Schluß; durch Subtraction der einen Gleichung von der anderen erhält man $c - d$ oder $d - c = 0$, woraus wieder $c = d$ folgen würde. Führt man aber in den oben aufgestellten allgemeinen Auflösungsformeln

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \text{ und } y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}$$

für a', b', c' die hier angenommenen Werthe a, b und d, oder ma, mb und md ein, so erhält man

$$x = \frac{bc - bd}{ab - ab} \text{ oder } = \frac{mbc - mbd}{mab - mab} = \frac{c - d}{0}$$

$$\text{und } y = \frac{ac - ad}{ab - ab} \text{ oder } = \frac{mac - mad}{mab - mab} = \frac{c - d}{0}.$$

Auch aus diesen Ausdrücken würde $c - d = 0$, also $c = d$ folgen. Aber auch schon in der Form x oder $y = \frac{c - d}{0}$ zeigen sie den in den Voraussetzungen begangenen Widerspruch an; denn sie verlangen eine Zahl, die mit 0 multiplicirt einen reellen Werth, $c - d$, hervorbrächte, was unmöglich ist.

Die hier an allgemeinen Formen dargelegten Schlüsse sind an geeigneten Zahlenbeispielen zu wiederholen.

§. 51.

Auflösung einfacher Gleichungen mit mehr als zwei unbekannten Größen.

1. Durch die vorigen Methoden, eine unbekannte Größe aus zwei Gleichungen zu eliminiren, ist zugleich die Lösung der Aufgabe vorbereitet, **Gleichungen mit mehr als zwei unbekannten Größen aufzulösen.**

Enthält eine Gleichung auch nur zwei unbekannte Größen, so reicht sie allein, wie wir gesehen haben, nicht hin, um irgend eine derselben zu bestimmen. Dasselbe ist der Fall, wenn sie mehr als zwei unbekannte Größen enthält. Den Beweis dieser Behauptung wird Jeder erlassen, wer die Wahrheit des ersten Satzes eingesehen hat. — Aus einer Gleichung kann daher geradezu der

Werth einer unbekannten Größe nur dann gefolgert werden, wenn außer dieser keine andere unbekannte Größe in der Gleichung vorkommt. Und sollen Gleichungen mit mehren unbekannten Größen den Werth einer jeden vollständig bedingen, mithin einer bestimmten Auflösung, die diese Werthe herausstellt, fähig sein; so müssen ihrer jedenfalls mehre vergesellschaftet, und es muß möglich sein, wie es schon bei Gleichungen mit zwei unbekannten Größen geschah, aus ihnen neue abzuleiten, in welchen nur je eine, und zwar die jedesmal gesuchte unbekannte Größe übrig bleibt. Zu dem Ende müssen die anderen eliminirt werden, und das kann vermittelst der vorigen Methoden geschehen, da dieselben offenbar nicht an die Voraussetzung gebunden sind, daß die beiden Gleichungen, aus welchen eine, ihnen gemeinschaftliche, unbekannte Größe fortgeschafft werden soll, deren überall nur zwei enthielten, sondern auch ohne alle Veränderungen auf Gleichungen mit beliebig vielen unbekannten Größen angewandt werden können, wenn nur, wie bisher, vorausgesetzt wird, daß beide, in entwickelter Gestalt, jede fortzuschaffende unbekannte Größe in demselben Gliede höchstens einmal als Factor enthalten.

2. Gesetzt nun, man hätte zwei von einander unabhängige und einander nicht widersprechende Gleichungen dieser Art, in welchen zusammen mehr als zwei unbekannte Größen vorkommen; so sind gleichwohl der Bedingungen noch nicht genug, um jede dieser unbekannten Größen zu bestimmen.

Allerdings kann aus diesen Gleichungen jede in beiden zugleich vorkommende unbekannte Größe durch eine der im vorigen §. gelehrten Methoden eliminirt werden; allein die abgeleitete Gleichung wird im Allgemeinen noch alle übrigen, also mehr als eine unbekannte Größe enthalten, mithin, um deren Werthe festzustellen, nicht genügen. Aus den Gleichungen

$$1)\quad ax + by + cz = d$$

und $$2)\quad a'x + b'y + c'z = d'$$

z. B. ergeben sich durch Elimination des z oder y oder x die neuen:

$$(ac' - a'c)x + (bc' - b'c)y = c'd - cd'$$
$$(ab' - a'b)x + (b'c - bc')z = b'd - bd'$$
$$(a'b - ab')y + (a'c - ac')z = a'd - ad';$$

jede aber enthält noch zwei, und zwar keine dieselben beiden unbekannten Größen wie die anderen.

Wollte man aber auch nach einander verschiedene Methoden anwenden, um dieselbe unbekannte Größe aus den gegebenen Gleichungen zu eliminiren, und sich dadurch mehr als eine neue mit denselben übrig bleibenden unbekannten Größen zu verschaffen; so würde man doch seinem Zwecke um Nichts näher kommen, da die abgeleiteten Gleichungen alle unter sich im Wesentlichen übereinstimmen müssen und höchstens der äußeren Form nach verschieden sein können. Denn aus denselben Voraussetzungen läßt sich folgerecht auch nur der nämliche Schluß ziehen.

Man stelle z. B. mit den vorigen Gleichungen den Versuch wirklich an, entweder z oder y oder x durch alle drei, im vorigen §. gelehrten Methoden zu eliminiren, und man wird sich leicht überzeugen, daß die abgeleiteten Gleichungen immer dieselben sind.

Und wenn endlich die beiden gegebenen Gleichungen so beschaffen wären, daß durch Elimination einer ihrer unbekannten Größen alle übrigen bis auf eine zugleich mit verschwänden; so ließe sich freilich diese letztere aus der abgeleiteten Gleichung bestimmen, aber die anderen bleiben nun doch noch unbestimmt. Denn durch Substitution des Werthes statt des Zeichens jener unbekannten Größe in die anfänglichen Gleichungen müßten diese, ihrer besonderen Beschaffenheit nach, einander gleich oder auf einander zurückführbar werden, so daß für die Auffindung aller übrigen unbekannten Größen im Grunde nur noch eine Gleichung vorhanden wäre. — Von der angegebenen Beschaffenheit sind z. B. die Gleichungen

$$1)\quad 5x + y - z = 35$$
$$\text{und}\quad 2)\quad x + 3y - 3z = 21,$$

aus welchen durch Elimination des z oder y die neue $14x = 84$ entspringt, so daß z und y immer zugleich verschwinden, und die abgeleitete Gleichung nur noch die eine unbekannte Größe x enthält. Man findet daher $x = 6$; wird aber dieser Werth statt des Zeichens x in die obigen Gleichungen eingeführt, so gehen dieselben in

$$1)\quad 5.6 + y - z = 35$$

und
$$2)\quad 6 + 3y - 3z = 21$$

über — zwei Gleichungen, die trotz ihrer anscheinenden Verschiedenheit doch übereinstimmen; denn die eine wie die andere kommt, möglichst vereinfacht, auf den Ausdruck $y - z = 5$ zurück.

Wie müssen überhaupt zwei Gleichungen mit beliebig vielen unbekannten Größen beschaffen sein, wenn diese, mit Ausnahme einer einzigen, alle auf einmal bei der Elimination der einen von ihnen verschwinden sollen? —

Die Bedingung ist durch ein allgemeines Schema darzustellen und an demselben nachzuweisen, daß keine der zugleich verschwindenden unbekannten Größen durch die angenommenen Gleichungen bestimmt werde.

3. Die Behauptung ist also gerechtfertigt, daß durch zwei Gleichungen mit mehr als zwei unbekannten Größen wenigstens noch nicht jede derselben bestimmt sei. Beschränkt sich die Zahl dieser unbekannten Größen auf drei, so müssen folglich, behufs der Feststellung und Auffindung ihrer Werthe, mindestens auch drei, und zwar von einander durchaus unabhängige und einander nicht widersprechende Gleichungen gegeben sein. — Von einander unabhängig dürfen aber mehr als zwei Gleichungen nur dann genannt werden, wenn nicht bloß keine aus einer der übrigen allein durch bloße Formverwandlungen, sondern auch nicht aus mehren oder allen übrigen durch irgend welche Verknüpfungen (z. B. solchen, welche bei der Elimination unbekannter Größen vorkommen,) hergeleitet werden kann. Auf entsprechende Art verlangt der Begriff gegenseitiger Widerspruchslosigkeit, wenn er auf mehr als zwei Gleichungen ausgedehnt wird, daß nicht bloß keine einer anderen, sondern eben so wenig einer solchen, die aus den übrigen durch beliebige Verknüpfungen abgeleitet werden kann, widerspreche. — Wie aber mindestens drei solcher Gleichungen erforderlich sind, so reichen sie auch hin, um jede der drei in sie verflochtenen unbekannten Größen zu bestimmen, gleichviel ob diese sämmtlich in jeder Gleichung vorkommen oder nicht.

Der Weg der Auflösung ist unter diesen Umständen leicht gefunden. Man eliminirt aus zweien von den gegebenen Gleichungen irgend eine in beiden zugleich vorkommende unbekannte Größe, — und dieselbe auch aus der dritten, wenn sie in dieser vorkommt, durch Zuziehung der ersten oder zweiten Gleichung. Die beiden abgeleiteten Gleichungen, oder war die zuerst fortzuschaffende unbekannte Größe nur in zwei Gleichungen vorhanden, die aus ihnen abgeleitete und die dritte gegebene enthalten nur noch zwei unbekannte Größen, und können überdieß, den obigen Annahmen zufolge, weder von einander abhängen noch einander widersprechen. Sie reichen also hin, die eine wie die andere unbekannte Größe zu bestimmen, und ihre Auflösung kommt lediglich auf frühere Methoden zurück, wenn sie dabei als einfach sich bewähren — die beständige Voraussetzung, auf welche die Regeln dieses Abschnitts sich beschränken. Auch in dem besonderen Falle, wenn zwei unbekannte Größen bei der Elimination der einen gleichzeitig aufgehoben werden, so daß die dritte allein in der abgeleiteten Gleichung zurückbleibt, behält das Gesagte seine Richtigkeit.

B. und Erörterung des dabei einzuschlagenden Verfahrens.

Auf diese Weise werden die Werthe von zwei unbekannten Größen gefunden. Die dritte kann entweder auf demselben Wege bestimmt werden, indem man die vorigen, eine nach der anderen, eliminirt und die dadurch gewonnene Gleichung auflöst, oder indem man in einer der anfänglichen Gleichungen, welche sie enthält, statt der beiden anderen die bereits gefundenen Werthe setzt, und hernach die Gleichung auflöst.

Die Möglichkeit, Gleichungen mit drei unbekannten Größen bloß durch Hülfe der vier Grundoperationen aufzulösen, hängt nach dem Vorhergehenden davon ab, daß jede aus ihnen zu diesem Zwecke abzuleitende Gleichung mit einer unbekannten Größe einfach sei. Unter dieser Bedingung sollen die anfänglichen Gleichungen selbst einfach heißen. — Solche, die nach gehöriger Entwickelung in keinem Gliede mehr als einen unbekannten Factor enthalten, mithin unter das Schema $ax + by + cz = d$*) passen, gehören jedenfalls zu den einfachen.**) Weßhalb?

*) Es mag noch zum Ueberfluß bemerkt werden, daß dieses Schema auch solche Gleichungen, welchen eins der angedeuteten Glieder fehlt, unter sich begreift, indem für d oder einen der Coefficienten a, b oder c — uneigentlich gesprochen — auch der Werth 0 zugelassen werden darf.

**) Aber auch Gleichungen, die dieser Voraussetzung nicht entsprechen. Vergl. das im Anhange Nro. 3. behandelte Beispiel.

An Gleichungen dieser Form mag das vorhin beschriebene Verfahren der Auflösung noch besonders gezeigt werden. Es seien also die Gleichungen

$$1)\quad ax + by + cz = d$$

$$2)\quad a'x + b'y + c'z = d'$$

und $3)\quad a''x + b''y + c''z = d''$ gegeben.

Aus der ersten und zweiten findet man durch Elimination des z (am bequemsten, wenn man die erste mit c', die zweite mit c multiplicirt und hierauf diese von jener abzieht) die neue Gleichung

$$4)\quad (ac' - a'c)x + (bc' - b'c)y = dc' - d'c,$$

desgleichen aus der ersten und dritten, ebenfalls durch Elimination des z, (die erste mit c'', die dritte mit c multiplicirt, und hierauf diese von jener abgezogen)

$$5)\quad (ac'' - a''c)x + (bc'' - b''c)y = dc'' - d''c.$$

Wird nun aus den beiden abgeleiteten Gleichungen y eliminirt, (um die entwickelte Form nicht aufzugeben, am bequemsten wieder durch die dritte Methode, §. 50. 4, indem man die vierte Gleichung mit $(bc'' - b''c)$, die fünfte mit $(bc' - b'c)$ multiplicirt und hierauf diese von jener subtrahirt), so erhält man

$$6)\quad [(ac' - a'c).(bc'' - b''c) - (ac'' - a''c).(bc' - b'c)].x$$

$$= (dc' - d'c).(bc'' - b''c) - (dc'' - d''c).(bc' - b'c),$$

folglich $x = \dfrac{(dc' - d'c).(bc'' - b''c) - (dc'' - d''c).(bc' - b'c)}{(ac' - a'c).(bc'' - b''c) - (ac'' - a''c).(bc' - b'c)}$

(abgekürzt) $= \dfrac{b(c'd'' - c''d') + b'(c''d - cd'') + b''(cd' - c'd)}{a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c)}.$

Auf entsprechende Art ließe sich aus der vierten und fünften Gleichung durch Elimination des x auch y, und wenn man zuerst aus den gegebenen Gleichungen x, nachher aus den beiden abgeleiteten y, oder umgekehrt erst y und dann x fortschaffte, auch z bestimmen. Allein die vollkommene Symmetrie der anfänglichen

Gleichungen macht ein viel kürzeres Verfahren möglich, von welchem überhaupt bei der Auflösung symbolischer Gleichungen mit mehren unbekannten Größen unter ähnlichen Voraussetzungen mit großem Vortheil Gebrauch zu machen ist. Wenn nämlich in den gegebenen Gleichungen die Coefficienten a, a′, a″ und b, b′, b″ (je ein a und b von gleichem Index) ihre Plätze wechselten, so würde y ganz an die Stelle des x treten und umgekehrt. Dieselbe Rechnung also, durch welche der Werth des x gefunden wurde, würde sich, um y zu bestimmen, mit dem einzigen Unterschiede wiederholen, daß jedes a mit einem b, und jedes b mit einem a von gleichem Index vertauscht wäre. Die Resultate können gleichfalls weiter keinen Unterschied zeigen. Der Werth des x geht folglich in den Werth des y über, wenn man in ihm statt jedes a das entsprechende b setzt und umgekehrt. Und würden in den anfänglichen Gleichungen die Coefficienten a, a′, a″ und c, c′, c″ mit einander vertauscht, so träte z an die Stelle des x und umgekehrt. Nimmt man daher dieselbe wechselseitige Vertauschung der a und c in dem Werthe des x vor, so erhält man den Werth des z. Demnach ist

$$y = \frac{a(c'd'' - c''d') + a'(c''d - cd'') + a''(cd' - c'd)}{b(a'c'' - a''c') + b'(a''c - ac'') + b''(ac' - a'c)}$$

und $$z = \frac{b(a'd'' - a''d') + b'(a''d - ad'') + b''(ad' - a'd)}{c(a''b' - a'b'') + c'(ab'' - a''b) + c''(a'b - ab')}$$

Durch welche Buchstabenverwechslung ließe sich auch aus dem Werthe des y der Werth des z herleiten? — Nachweisung der Uebereinstimmung dieses letztern mit dem vorstehenden.

Umformung der Werthe des x, y und z (durch Ausführung der in ihnen angedeuteten Multiplicationen u. s. w.), so daß ihre Nenner einander gleich werden.

4. Mehr als drei unbekannte Größen lassen sich aber wieder durch drei Gleichungen nicht bestimmen. Aus je zwei Gleichungen kann durch Elimination derselben unbekannten Größe, auch wenn man sich dazu verschiedener Methoden bediente, doch nur dieselbe Gleichung abgeleitet werden. Man könnte aber glauben, durch Elimination derselben unbekannten Größe aus der ersten und zweiten, der ersten und dritten, und endlich der zweiten und dritten Gleichung

müßten sich drei verschiedene Gleichungen ergeben. Indessen allemal die dritte dieser Gleichungen ist von den beiden anderen abhängig. Zum Beweise diene Folgendes.

Die Methode, durch welche eine unbekannte Größe aus zwei Gleichungen eliminirt wird, hat, wie schon bemerkt, keinen Einfluß auf das Wesen der abgeleiteten Gleichung. Man nehme also an, die drei in Rede stehenden Gleichungen würden alle durch dieselbe, und zwar durch die Methode der Subtraction abgeleitet. Man nehme ferner an, um nicht genöthigt zu sein, besondere Beschaffenheiten der gegebenen Gleichungen in Betracht zu ziehen, dieselben würden zuvor durch Multiplication mit den geeigneten Factoren so eingerichtet, daß dasjenige Glied, welches die fortzuschaffende unbekannte Größe enthält, in allen dreien übereinstimmt. In dieser Form mögen sie **A**, **B** und **C**, und die aus ihnen, und zwar aus der ersten und zweiten, der ersten und dritten und der zweiten und dritten auf die angegebene Weise abzuleitenden Gleichungen α, β und γ heißen: so ist

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \alpha, \quad \mathbf{A} - \mathbf{C} = \beta \ \text{ und } \ \mathbf{B} - \mathbf{C} = \gamma;$$

folglich $\beta - \alpha = (\mathbf{A}-\mathbf{C}) - (\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{B} - \mathbf{C} = \gamma$,

$$\alpha + \gamma = (\mathbf{A}-\mathbf{B}) + (\mathbf{B}-\mathbf{C}) = \mathbf{A} - \mathbf{C} = \beta,$$

und $\beta - \gamma = (\mathbf{A}-\mathbf{C}) - (\mathbf{B}-\mathbf{C}) = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \alpha$,

d. h. jede der drei abgeleiteten Gleichungen kann aus den beiden anderen gefolgert werden, und nur je zwei derselben sind von einander unabhängig.

Weiter ausgedehnt führt dieser Satz auf den Schluß, daß die Elimination der nämlichen unbekannten Größe aus mehren, von einander unabhängigen Gleichungen nur so lange neue, selbst wieder von einander unabhängige Gleichungen liefert, als dabei die Zusammenstellung zweier Gleichungen, die schon mit der nämlichen dritten in Verbindung gekommen sind, vermieden wird. Unter dieser Beschränkung gestatten **n** Gleichungen nur **n** — **1** Zusammenfassungen zu je zweien.

Nachzuweisen.

Sofern also nur von einander unabhängige Gleichungen in

Betracht kommen, bringt die vollständige Elimination derselben unbekannten Größe stets eine Gleichung weniger hervor, als gegeben sind.

Da nun aus Gleichungen, welche mehre unbekannte Größen enthalten, der Werth einer jeden nur dann bestimmt werden kann, wenn sich aus ihnen neue Gleichungen ableiten lassen, in welchen außer der jedesmal gesuchten keine andere unbekannte Größe vorkommt, mithin zur Auffindung jeder einzelnen alle übrigen unbekannten Größen aus den gegebenen Gleichungen fortgeschafft werden müssen, bei fortschreitender Elimination aber mit der Zahl der unbekannten Größen zugleich die Zahl der zu ferneren Eliminationen brauchbaren Gleichungen um eins vermindert wird: so müssen, um einer bestimmten Auflösung fähig zu sein, mindestens eben so viele, von einander unabhängige und einander nicht widersprechende Gleichungen gegeben sein, als unbekannte Größen in denselben vorkommen, — und Aufgaben, welche mehre unbekannte Größen zu bestimmen fordern, deren gegenseitige Beziehungen nicht geradezu angegeben sind, müssen eben so viele, von einander wesentlich verschiedene, jedoch mit einander vereinbare Bedingungen aufstellen, die sich durch Gleichungen ausdrücken lassen.

Das Verfahren der Auflösung selbst unter diesen Voraussetzungen ist folgendes. Man eliminirt irgend eine der unbekannten Größen aus sämmtlichen Gleichungen, welche sie enthalten, eine jede wenigstens einmal zu diesem Zwecke mit einer anderen verknüpfend, gleichviel durch welche Methode. Um dabei sicher zu sein, nicht zwei Gleichungen zu vereinigen, welche schon mit der nämlichen dritten in Verbindung gebracht sind, thut man wohl, zur Elimination der fraglichen unbekannten Größe aus jeder folgenden Gleichung immer nur eine der schon früher benutzten zu gebrauchen. Solche Gleichungen, welchen diese unbekannte Größe ohnehin fehlt, dürfen unverändert unter die abgeleiteten aufgenommen werden.

Aus diesen schafft man wiederum auf gleiche Weise eine der übrig gebliebenen unbekannten Größen fort und wiederholt das ganze Verfahren so lange, bis man eine Gleichung bekommt, in welcher nur noch eine unbekannte Größe übrig ist. Diese Gleichung muß aufgelöst werden, um den Werth ihrer unbekannten Größe zu finden. Man hat aber die Wahl, welche von allen unbekannten Größen für die letzte Gleichung aufgespart werden soll. Man kann also eine nach der anderen dazu nehmen, jede durch Elimination aller übrigen in eine eigene Gleichung bringen und durch Auflösung aller so gewonnenen Gleichungen nach und nach die Werthe aller gesuchten Größen bestimmen.

Ob aber alle Eliminationen, welche zur Ableitung dieser Gleichungen mit je einer unbekannten Größe erforderlich sind, bloß durch Hülfe der bisher gelehrten Methoden verrichtet, und ob diese Gleichungen selbst bloß vermittelst der vier einfachen Rechnungsarten aufgelöst werden können, hängt davon ab, daß alle Gleichungen, von den anfänglichen bis zu den letzten abgeleiteten, in entwickelter und möglichst vereinfachter Gestalt kein Glied enthalten, in welchen dieselbe unbekannte Größe mehr als einmal als Factor vorkäme. Unter dieser Voraussetzung, welche allemal zutrifft, wenn die gegebenen Gleichungen, entwickelt und möglichst vereinfacht, in keinem Gliede mehr als einen unbekannten Factor enthalten, also unter das Schema $ax + by + cz + \text{rc.} = d$ passen, sollen dieselben **einfach** heißen.

Die Beschreibung des Verfahrens, aus Gleichungen mit mehren unbekannten Größen unter den angegebenen Bedingungen eine Gleichung mit einer unbekannten Größe abzuleiten, in der besonderen Voraussetzung, daß man sich zur Elimination ausschließlich der Methode der Substitution bedienen wolle. B.

Nachdem auf dem angezeigten Wege nur erst eine unbekannte Größe gefunden ist, kann man die Werthe der übrigen auch dadurch bestimmen, daß man den Werth der ersten in einer der zuvor abgeleiteten Gleichungen, welche außer ihr nur noch eine unbekannte Größe enthalten, substituirt und die Gleichung auflöst, hierauf die Werthe der ersten uud zweiten in eine der nächstvorhergehenden Gleichungen, welche außer ihnen nur noch eine dritte, und überhaupt die Werthe aller zuvor bestimmten unbekannten Größen, oder so viele man deren gebraucht, in eine der Gleichungen einführt, welche außer jenen nur eine noch nicht bestimmte unbekannte Größe enthalten, und nachher die Gleichung auflöst. Sehr oft ist dieses Verfahren bequemer als das zuerst beschriebene.

Erläuterung an dem zuvor gewählten Beispiele.

Anmerk. Sollten unter den gegebenen Gleichungen auch solche vorkommen, die von einander nicht unabhängig sind oder in Widerspruch mit einander stehen, so wird sich dieses immer schon während der zur Auflösung nöthigen Operationen zu erkennen geben. Im ersten Falle wird man, von Voraussetzungen ausgehend, die für verschiedene gelten sollen, auf übereinstimmende Gleichungen kommen. Im zweiten Falle werden unter den gegebenen oder aus ihnen abgeleiteten Gleichungen auch zwei von solcher Beschaffenheit vorkommen, daß wenn alle aus bloß bekannten Größen zusammengesetzten Glieder allein auf die eine Seite geschafft werden, die beiden anderen Seiten in völlige Uebereinstimmung gebracht werden können, während die ihnen gleichgesetzten Werthe verschieden sind.

Wollte man aber in beiden Voraussetzungen die gegebenen Gleichungen unter allgemeine Schemata bringen, aus diesen die Formeln für die Bestimmung jeder unbekannten Größe ableiten, und nun in diese Formeln statt der allgemeinen Zeichen für einzelne Glieder oder Coefficienten derselben die entsprechenden Werthe des besonderen Falls einführen; so würde man eben solche Resultate erhalten, als wenn Gleichungen mit zwei unbekannten Größen, die von einander abhängen oder sich widersprechen, nach allgemeinen Formeln aufgelöst werden sollten. (Siehe die Anm. zum vorigen §. S. 210 ff.)

Werden aus den Bedingungen einer Aufgabe mehr Gleichungen abgeleitet, als unbekannte Größen in dieselben aufgenommen werden, so müssen diejenigen, welche über jene Zahl hinausgehen, von den übrigen abhängig sein, wenn sie denselben nicht widersprechen sollen.

Anhang. Auflösung einiger Aufgaben, welche auf einfache Gleichungen mit mehr als zwei unbekannten Größen führen.

I. **Drei Arbeiter, A, B und C haben eine Arbeit auf folgende Weise vollendet. A und B haben zusammen die Hälfte derselben in 3, B** und C ein Viertel in 2, und A und C das letzte Viertel in $1\frac{1}{4}$ Tagen fertig gemacht. In wie langer Zeit würde Jeder allein damit fertig geworden sein?

Um diese Frage zu beantworten, ist es am gerathensten, zuerst zu bestimmen, ein wie großes Stück der ganzen Arbeit nach den vorigen Angaben jeder der drei Leute in einem Tage beschafft hat. Es mag also, was A, B und C, jeder in einem Tage anfertigt, durch x, y und z bezeichnet werden, die ganze Arbeit als Einheit genommen. Nun sollen A und B zusammen in 3 Tagen die Hälfte vollendet haben; in einem Tage haben sie also den dritten Theil der Hälfte, d. i. $\frac{1}{6}$ des Ganzen gemacht. Ferner haben B und C zusammen in 2 Tagen $\frac{1}{4}$, also jeden Tag $\frac{1}{8}$, und endlich A und C in $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ Tagen das letzte Viertel, also in einem Tage $\frac{1}{4} : \frac{5}{4} = \frac{1}{5}$ des Ganzen gemacht. In Zeichen:

$$1)\quad x + y = \frac{1}{6}$$

$$2)\quad y + z = \frac{1}{8}$$

$$3)\quad x + z = \frac{1}{5}.$$

Aus der 2ten und 3ten Gleichung ergiebt sich durch Elimination des z

$$4)\quad x - y = \frac{3}{40}\left(= \frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right),$$ und aus

dieser und der ersten $x + y = \frac{1}{6}$, wenn y eliminirt wird,

$$5)\quad 2x = \frac{29}{120}\left(= \frac{1}{6} + \frac{3}{40}\right),$$

und wenn x eliminirt wird,

$$6)\quad 2y = \frac{11}{120}\left(= \frac{1}{6} - \frac{3}{40}\right).$$

Folglich ist $x = \frac{29}{240}$, und $y = \frac{11}{240}$.

Um endlich auch z zu finden, könnte man aus

$$1)\quad x + y = \frac{1}{6}$$

und $2)\quad y + z = \frac{1}{8}$ durch Elimination des y

$$7)\quad x - z = \frac{1}{24}\left(= \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right),$$ und aus

dieser und der Gleichung 3) $x + z = \frac{1}{5}$ durch Elimination des x

$$8) \quad 2z = \frac{19}{120}\left(=\frac{1}{5} - \frac{1}{24}\right) \text{ ableiten,}$$

woraus $z = \frac{19}{240}$ folgt.

Man hätte aber auch den Werth des x in der dritten, oder des y in der zweiten Gleichung substituiren können, und dadurch

entweder $\frac{29}{240} + z = \frac{1}{5}$,

also $z = \frac{1}{5} - \frac{29}{240} = \frac{19}{240}$,

oder $\frac{11}{240} + z = \frac{1}{8}$,

also wieder $z = \frac{1}{8} - \frac{11}{240} = \frac{19}{240}$ gefunden.

Wenn nun aber A in einem Tage $\frac{29}{240}$ einer Arbeit anfertigen kann, so würde er, um sie ganz zu vollenden, $1 : \frac{29}{240} = \frac{240}{29} = 8\frac{8}{29}$ Tage gebrauchen. Auf gleiche Weise findet man, daß B $\frac{240}{11} = 21\frac{9}{11}$, und C $\frac{240}{19} = 12\frac{12}{19}$ Tage dazu nöthig hätte.

Die Aufgabe ist so zu verallgemeinern, daß man annimmt, A und B hätten zusammen die Hälfte der Arbeit in a, B und C das Viertel in b, und A und C das noch übrige Viertel in c Tagen fertig gemacht.

2. Man hat drei Gemische, deren jedes die drei Substanzen a, b und c enthält, und zwar

	der Substanz	a,	b,	c,		
das erste	„ „	12,	8,	20,	zusammen	40 Theile,
das zweite	„ „	10,	11,	9,	„	30 „
das dritte	„ „	6,	8,	6,	„	20 „

Man will daraus eine Mischung zusammensetzen, welche 8, 5 Theile der Substanz a, 8, 4 Theile der Substanz b und 10, 1 Theile der Substanz c enthält. Wie viele Theile müßte man von dem ersten, zweiten und dritten Gemische nehmen?

Die drei gesuchten Quantitäten mögen durch x, y und z bezeichnet werden. Alsdann ist klar, daß jeder Theil

der Substanz	a,	b,	c
des ersten Gemischs . .	$\frac{12}{40}$ oder $\frac{3}{10}$,	$\frac{8}{14}$ oder $\frac{1}{5}$,	$\frac{20}{40}$ oder $\frac{1}{2}$
des zweiten Gemischs . .	$\frac{10}{30}$ oder $\frac{1}{3}$,	$\frac{11}{30}$,	$\frac{9}{30}$ oder $\frac{3}{10}$
des dritten Gemischs . .	$\frac{6}{20}$ oder $\frac{3}{10}$,	$\frac{8}{20}$ oder $\frac{2}{5}$,	$\frac{6}{20}$ oder $\frac{3}{10}$ enthält.

In x Theilen des ersten Gemischs bekommt man also $\frac{3}{10}x$ der ersten, $\frac{1}{5}x$ der zweiten und $\frac{1}{2}x$ der dritten Substanz. Auf entsprechende Art bestimmt man, wie viele Theile von jeder Substanz in y Theilen des zweiten und in z Theilen des dritten Gemischs enthalten sind. Die Bedingungen, denen die drei Zahlen x, y und z genügen sollen, werden demnach durch folgende drei Gleichungen ausgedrückt:

1) $\frac{3}{10}x + \frac{1}{3}y + \frac{3}{10}z = 8,5$, entwi- $9x + 10y + 9z = 255$,
2) $\frac{1}{5}x + \frac{11}{30}y + \frac{2}{5}z = 8,4$, ckelt, $6x + 11y + 12z = 252$,
3) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{10}y + \frac{3}{10}z = 10,1$, „ $5x + 3y + 3z = 101$.

Durch Elimination des z aus der ersten und dritten, (wenn diese mit 3 multiplicirt, und darauf die erste von ihr abgezogen wird,) und aus der zweiten und dritten, (wenn die letzte mit 4 multiplicirt, und darauf die zweite von ihr subtrahirt wird,) erhält man:

$$\begin{array}{rl} 9x + 10y + 9z &= 255 \\ 15x + 9y + 9z &= 303 \\ \hline 4)\ 6x - y &= 48, \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 6x + 11y + 12z &= 252 \\ 20x + 12y + 12z &= 404 \\ \hline 5)\ 14x + y &= 152. \end{array}$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man, indem man sie, um y zu eliminiren, addirt:

$$\begin{array}{rl} 6x - y &= 48 \\ 14x + y &= 152 \\ \hline 6)\ 20x &= 200 \\ \text{folglich}\ x &= 10. \end{array}$$

Um y zu finden, substituirt man diesen Werth in einer der beiden vorigen Gleichungen, z. B. in der vierten: dieß giebt $6.10 - y = 48$, folglich $y = 60 - 48 = 12$.

Und endlich auch z zu bestimmen, setzt man in einer der drei ersten Gleichungen statt x und y ihre Werthe und löst sie auf. Dadurch geht z. B. die dritte in $5.10 + 3.12 + 3z = 101$ über, woraus $z = 5$ gefunden wird.

Statt der dritten oder einer der beiden anderen Gleichungen hätte man auch diese

$$x + y + z\ [= 8{,}5 + 8{,}4 + 10{,}1] = 27$$

nehmen können. — Die Auflösung unter dieser Annahme. — Die genannte Gleichung ist von den drei zuerst angenommenen abhängig. — Nachzuweisen.

Auch durch Substitution der hier gegebenen Werthe in die oben S. 217 und 218 aufgestellten Schemata sind die Werthe von x, y und z zu berechnen.

3. Es sollen drei Zahlen von folgender Beschaffenheit gefunden werden. Wenn man mit der ersten in 6, mit dem Doppelten der zweiten in 5 und mit der dritten in 1 dividirt, und den letzten Quotienten von der Summe der beiden ersten subtrahirt; so soll die Differenz $= 7\frac{1}{2}$ sein. Wenn man ferner mit der ersten in 1, mit der zweiten in 2, und mit dem Dreifachen der dritten ebenfalls in 2 dividirt; so soll die Summe aller drei Quotienten 4 betragen. Und wenn man endlich mit der ersten in 2, mit dem Dreifachen der zweiten und ebenfalls mit der dritten in 1 dividirt, und die beiden letzten Quotienten von dem ersten abzieht; so soll der Rest $\frac{1}{2}$ sein.

Bezeichnet man die drei gesuchten Zahlen durch x, y und z, so werden die drei angegebenen Bedingungen durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$1)\quad \frac{6}{x} + \frac{5}{2y} - \frac{1}{z} = 7\tfrac{1}{2}$$

$$2)\quad \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{3z} = 4$$

$$3)\quad \frac{2}{x} - \frac{1}{3y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

Nach gewohnter Weise würde man diese Gleichungen entwickeln, wodurch sie in

$$\text{I.}\quad 12\,yz + 5\,xz - 2\,xy = 15\,xyz$$

$$\text{II.}\quad 3\,yz + 6\,xz + 2\,xy = 12\,xyz$$

und $\text{III.}\quad 12\,yz - 2\,xz - 6\,xy = 3\,xyz$ übergingen.

Hierauf in jeder Gleichung die Glieder, welche z enthalten, in eins zusammengefaßt, erhält man:

$$\text{I.}\quad (12\,y + 5\,x - 15\,xy).z - 2\,xy = 0$$

$$\text{II.}\quad (3\,y + 6\,x - 12\,xy).z + 2\,xy = 0$$

$$\text{III.}\quad (12\,y - 2\,x - 3\,xy).z - 6\,xy = 0,$$

ferner die Gl. I. mit $(3y + 6x - 12xy)$, die Gl. II. mit $(12y + 5x - 15xy)$ multiplicirt, und diese von jener abgezogen, desgleichen die Gl. I. mit $(12y - 2x - 3xy)$, die Gl. III. mit $(12y + 5x - 15xy)$ multiplicirt, und diese von jener abgezogen:

IV. $-2xy(3y + 6x - 12xy) - 2xy(12y + 5x - 15xy) = 0$

u. V. $-2xy(12y - 2x - 3xy) + 6xy(12y + 5x - 15xy) = 0$,

oder nachdem die Gl. IV. durch $-2xy$, die Gl. V. durch $+2xy$ dividirt ist, und die möglichen Zusammenziehungen vorgenommen sind:

IV. $15y + 11x - 27xy = 0$ oder $(15 - 27x).y + 11x = 0$

u. V. $24y + 17x - 42xy = 0$ oder $(24 - 42x).y + 17x = 0$.

Alsdann die Gl. IV. mit $(24 - 42x)$, die Gl. V. mit $(15 - 27x)$ multiplicirt, und jene von dieser subtrahirt, bekommt man:

VI. $17x(15 - 27x) - 11x(24 - 42x) = 0$,

dividirt durch $3x$:

$$17(5 - 9x) - 11(8 - 14x) = 0,$$

die Klammern aufgelöst und gleichartige Glieder zusammengezogen:

$$x - 3 = 0, \text{ also } x = 3.$$

Durch Substitution dieses Werthes in der Gleichung IV. erhält man

$$\left[(15 - 27.3)y + 11.3 =\right] - 66y + 33 = 0,$$

mithin $y = \frac{1}{2}$,

und durch Substitution der Werthe für x und y in der Gl. I.

$$\left[\frac{6}{3} + \frac{5}{2.\frac{1}{2}} - \frac{1}{z} = \right] 7 - \frac{1}{z} = 7\tfrac{1}{2}, \text{ woraus}$$

$z = -2$ folgt.

Auch die Methoden der Combination und Substitution sind zur Ableitung der ersten Gleichung mit einer unbekannten Größe aus den gegebenen Gleichungen anzuwenden.

Kürzer aber als auf dem angezeigten Wege kommt man zum Ziele, wenn man die anfänglichen Gleichungen unentwickelt beibehält und, sofern man sich zu den erforderlichen Eliminationen unbekannter Größen der Methode der Addition oder Subtraction bedienen will, die beiden Glieder, deren Nenner die jedesmal fortzuschaffende unbekannte Größe enthalten, wenn sie nicht ohnehin übereinstimmen, durch Multiplication der zu vereinigenden Gleichungen mit den geeigneten Factoren in Uebereinstimmung bringt. So erhält man z. B., wenn man die Gl. 1), um aus ihr und der Gl. 2) z zu eliminiren, mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt,

$$\frac{4}{x} + \frac{5}{3y} - \frac{2}{3z} = 5,$$

dazu addirt 2) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{3z} = 4$

4) $\frac{5}{x} + \frac{11}{3y} = 9;$

ferner von der Gl. 1) $\frac{6}{x} + \frac{5}{2y} - \frac{1}{z} = 7\frac{1}{2}$

subtrahirt die Gl. 3) $\frac{2}{x} - \frac{1}{3y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

5) $\frac{4}{x} + \frac{17}{6y} = 7$

Aus den Gl. 4) und 5) ist nun am leichtesten x zu eliminiren, indem man jene mit 4, diese mit 5 multiplicirt und darauf diese von jener subtrahirt; also

von $\frac{20}{x} + \frac{44}{3y} = 36$

subtrahirt $\frac{20}{x} + \frac{85}{6y} = 35$

giebt 6) $\frac{3}{6y} = 1$, folglich $y = \frac{1}{2}$, wie vorhin.

Setzt man diesen Werth statt y entweder in der Gl. 4) oder in der Gl. 5), so giebt die Auflösung derselben, wie vorhin, $x = 3$, und mit Hülfe dieser Werthe für y und x findet man ebenso wie früher $z = -2$.

Wollte man die vorzunehmenden Eliminationen durch die Methode der Combination oder der Substitution bewirken, so würde man wohl thun, um unnöthige Verwickelungen der Form zu vermeiden, anstatt für x, y oder z selbst, für die Brüche $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ oder $\frac{1}{z}$ Werthe abzuleiten, und diese zu combiniren oder zu substituiren. Und wollte man sich gar nicht von der gewohnten Form entfernen, so könnte man statt jener Brüche erst einfache Zeichen, etwa x′, y′ und z′ einführen, zuerst deren Werthe, und aus diesen zuletzt x, y und z selbst bestimmen.

Auf beiderlei Art auszuführen.

Unter welchen Bedingungen werden Gleichungen von ähnlicher Form wie die oben aufgestellten I., II. und III., trotz des Anscheins, als wären sie höheren Grades, (weil ihre Glieder mehre unbekannte Factoren enthalten) doch zu den einfachen gehören?

4. Ein Kaufmann erhält zwei Sorten Zucker, von der ersten 200, von der zweiten 100 Pfd., ferner 150 Pfd. Kaffee und zwei Sorten Thee, von der ersten 5, von der zweiten 15 Pfd. Er bezahlt dafür im Ganzen 105 Thlr., und zwar für den Zucker und Kaffee zusammen $2\frac{1}{2}$ mal so viel, als für den Thee. Den Zucker verkauft er mit 20, den Thee mit 5 pro Cent Gewinn, verdient aber doch, wenn er Durchschnittspreise der verschiedenen Sorten berechnet, an 10 Pfd. Thee eben so viel wie an 27 Pfd. Zucker. Weil er ein Steigen der Preise voraussieht, bestellt er noch von jeder Waare die zehnfache Quantität der vorigen, und da inzwischen wirklich der Preis der ersten Sorte Zucker um 4, der zweiten um 5, des Kaffees um 8 pro Cent steigt, der Preis der ersten Sorte Thee dagegen unverändert bleibt und der zweiten Sorte um 4 pro Cent sinkt, erspart er an der ganzen Kaufsumme, weil er noch die alten Preise zahlt, 35 Thlr. Beim Verkauf schlägt er auf diese veränderten Preise bei der ersten Sorte Zucker 15, bei der zweiten 12, beim Kaffee und der zweiten Sorte Thee 10 pro Cent auf, und gewinnt dadurch im Ganzen 120 Thlr.— Wie hoch waren die Einkaufspreise?

Bezeichnet man die Preise je eines Pfundes der genannten Waaren in der Ordnung, wie sie angegeben sind, mit x, y, z, u, w; so lassen sich die vorstehenden Angaben folgendermaßen durch Gleichungen ausdrücken.

a. Daß die zuerst genannten Quantitäten aller fünf verschiedenen Waarengattungen zusammen 105 Thlr. kosten, giebt die Gleichung

1) $200x + 100y + 150z + 5u + 15w = 105$,

und b. daß der Zucker und Kaffee zusammen $2\frac{1}{2}$ mal so viel kosten als der Thee, die Gleichung

2) $200x + 100y + 150z = 2\frac{1}{2} \cdot (5u + 15w)$ an.

Welcher Rechnung bedürfte es, und welche Gleichungen würde man erhalten, wenn man ansetzen wollte, was der Zucker und Kaffee, oder was die beiden Sorten Thee zusammen gekostet haben? — und wie viele von diesen und den beiden vorstehenden Gleichungen würden von einander unabhängig sein?

c. Der Durchschnittspreis für 1 Pfund Zucker beträgt $\frac{(200x+100y)}{300} = \frac{2x+y}{3}$, für 1 Pfd. Thee $\frac{5u+15w}{20} = \frac{u+3w}{4}$; der Gewinn an 27 Pfd. Zucker zu 20 pro Cent soll dem Gewinne an 10 Pfd. Thee zu 5 pro Cent des Einkaufspreises gleich sein, also:

$$3)\quad \frac{2x+y}{3} \cdot \frac{20}{100} \cdot 27 = \frac{u+3w}{4} \cdot \frac{5}{100} \cdot 10,$$

oder $\quad 144x + 72y = 5u + 15w.$

d. Das Zehnfache aller vorigen Quantitäten würde bei den bisherigen Preisen 1050 Thlr., bei den angegebenen Veränderungen der Preise aber 35 Thlr. mehr, also 1085 Thlr. kosten, also:

$$4)\quad 2000x \cdot 1{,}04 + 1000y \cdot 1{,}05 + 1500z \cdot 1{,}08 + 50u + 150w \cdot 0{,}96 = 1085,$$

oder $\quad 2080x + 1050y + 1620z + 50u + 144w = 1085.$

Durch welche Gleichung würde ausgedrückt, daß der Ueberschuß der Kaufsumme bei den neuen Preisen über die zu den vorigen Preisen berechnete 35 Thlr. beträgt?

e. Daß endlich der Gewinn an den drei ersten und der fünften Waarengattung, nach den angegebenen Verhältnissen zu den neuen Preisen berechnet, im Ganzen 120 Thlr. betrage, wird durch die Gleichung

$$5)\quad 2080x \cdot 0{,}15 + 1050y \cdot 0{,}12 + 1620z \cdot 0{,}10 + 144w \cdot 0{,}10 = 120,$$

oder $\quad 312x + 126y + 162z + 14{,}4w = 120$

ausgedrückt.

Nach einigen leichten Abänderungen erhält man also folgende fünf Gleichungen:

$$\begin{array}{lrl}
1) & 200x + 100y + 105z + 5u + 15w & = 105 \\
2) & 80x + 40y + 60z - 5u - 15w & = 0 \\
3) & 144x + 72y - 5u - 15w & = 0 \\
4) & 208x + 105y + 162z + 5u + 14{,}4w & = 108{,}5 \\
5) & 312x + 126y + 162z + 14{,}4w & = 120.
\end{array}$$

Am leichtesten läßt sich aus diesen Gleichungen u eliminiren. Man erhält z. B.

aus Gl. 1) und 2).. 6) $280x + 140y + 210z = 105$
aus Gl. 1) und 3).. 7) $344x + 172y + 150z = 105$
aus Gl. 1) und 4).. 8) $8x + 5y + 12z - 0{,}6w = 3{,}5$
dazu Gl. 5) div. durch 6, 5) $52x + 21y + 27z + 2{,}4w = 20.$

Jetzt kommt w nur noch in den Gl. 8) und 5) vor, aus welchen es durch Addition beider Gleichungen, nachdem die erste mit 4 multiplicirt ist, eliminirt werden kann. Dieß giebt

$$9)\quad 84x + 41y + 75z = 34.$$

Aus dieser und den Gl. 6) und 7) läßt sich am bequemsten z wegschaffen. So ergiebt sich z. B.

aus Gl. 6) und 7).. 10) $1008x + 504y = 210,$
dividirt durch 14, ... $72x + 36y = 15$
und aus Gl. 7) und 9).. 11) $176x + 90y = 37.$

Aus den beiden letzten Gleichungen aber findet man

$$12)\quad 8x = 1,$$
folglich $x = \frac{1}{8}.$

Wird dieser Werth in der Gleichung 10) substituirt, so erhält man $9 + 36y = 15$, folglich $y = \frac{1}{6}$.

Durch Substitution dieser Werthe für x und y in einer der Gleichungen 6), 7) oder 9) und durch nachfolgende Auflösung derselben findet man $z = \frac{2}{5}$: wenn ferner die drei gefundenen Werthe in die Gl. 5) oder 8) eingeführt, und darauf die Gleichungen aufgelöst werden, $w = 1\frac{2}{3}$, und wenn endlich in einer der Gleichungen 1), 2), 3) oder 4) jeder dieser vier Werthe statt seines Zeichens gesetzt, und die Gleichung aufgelöst wird, $u = 1$.

Die zur Auflösung der gegebenen Gleichungen erforderlichen Eliminationen sind auch noch in anderer Ordnung und nach anderen Methoden auszuführen. — Statt der Gl. 2) und 4) sind auch die sub lit. b. und d. geforderten der Auflösung zum Grunde zu legen.

Vielfache Uebungen im Ansatz und der Auflösung von Gleichungen mit mehren unbekannten Größen.

Die allgemeine Formel für die Auflösung einfacher Gleichungen mit vier unbekannten Größen.

Prüfung und Beurtheilung folgender, zur Auflösung gegebener Gl.

$$1)\quad \frac{2x+3y}{x+y} = 2^1/_5$$

$$2)\quad \frac{x+z}{5(x-z)} = \frac{1}{3}$$

$$3)\quad \frac{10x-3z}{4x-2z} = 2^9/_{14}$$

Achter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

---

§. 52.

Verhältniss, — arithmetisches, geometrisches, — Glieder desselben.

Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen, deren Grundzüge hier mitgetheilt werden sollen, verdient ihre Stelle weniger deßhalb, weil sie, als ein Bedürfniß der Wissenschaft, zu den früher abgehandelten Lehren noch etwas wesentlich Neues hinzufügte, als vielmehr aus dem Grunde, weil sie eine Menge von Begriffen, Sätzen und Regeln zusammenstellt, welche, in der gemeinen Vorstellungsweise und den am häufigsten vorkommenden Rechnungen des gemeinen Lebens ebensowohl als in der Behandlung gewisser Theile der Größenwissenschaft, namentlich der Geometrie, von Alters her eingebürgert sind, eben deßhalb eine eigenthümliche Kunstsprache und Bezeichnung gefunden haben, deren Kenntniß nicht wohl entbehrt werden kann, und auch, wenn man sie als bekannt voraussetzen darf, zur Erleichterung und Abkürzung mancher Rechnungen, Untersuchungen und Beweise beitragen.

1. Wenn von dem Verhältniß zweier Dinge die Rede ist, so wird vorausgesetzt, daß beide mit einander verglichen sind. Betrifft das Verhältniß nur die Größe der Dinge, so müssen diese gleichartig, oder als gleichartig gedacht sein; denn nur gleichartige Dinge lassen sich hinsichtlich ihrer Größe mit einander vergleichen (Einl. §. 1.). Das Verhältniß zweier Größen kann aber auf doppelte Art ausgedrückt werden. Entweder giebt man an, wie viel die eine mehr oder weniger beträgt als die andere,

oder man giebt an, wie viel mal die eine Größe die andere, oder einen bestimmten aliquoten Theil derselben enthält. Die im ersten Falle ausgedrückte Beziehung der einen Größe auf die andere heißt ihr arithmetisches, die zweite ihr geometrisches Verhältniß zu derselben. So bestimmt man z. B. das arithmetische Verhältniß des alten Pariser zum Rheinländischen (Preußischen) Fuß, wenn man angiebt, daß jener 4,86 Par. Linien länger ist als dieser, das geometrische durch die Angabe, daß er 1,035 mal so groß sei als dieser.

Andere B.

Offenbar ist, wenn früher von dem Verhältniß zweier Größen schlechthin die Rede war, nur das geometrische gemeint gewesen: so, wenn (§. 1. 4) die Zahl als Ausdruck des bestimmten Verhältnisses einer Größe zu ihrer gleichartigen Einheit, oder als die Angabe erklärt wurde, wie durch Wiederholung oder Eintheilung eines Dinges (in gleiche Theile) oder durch Beides zugleich die Größe eines anderen Dinges gleicher Art erzeugt werde, und ebenso, wenn (§. 11. 3, a) die Aufgabe der Division in dem einen Sinne, dessen diese Rechnungsart fähig ist, darein gesetzt wurde, das Verhältniß des Dividends zum Divisor, d. h. die Art und Weise zu erforschen, wie jener aus diesem gebildet sei.

2. In das Gebiet der Arithmetik werden Größen erst dadurch eingeführt, daß sie im Verhältniß zu gleichartigen Einheiten durch Zahlen ausgedrückt, oder des Ausdrucks durch Zahlen fähig angenommen werden. Für das Verhältniß zweier Größen kann das Verhältniß der Zahlen, welche dieselben darstellen, aber auch nur dann gesetzt werden, wenn beide Zahlen die nämliche Einheit haben.

Erläuterung an Beispielen.

3. Dieß vorausgesetzt, ist die Aufgabe, das arithmetische Verhältniß zweier Zahlen, und die Aufgabe, ihre Differenz oder ihren Unterschied zu finden, dieselbe, und wird auch so bezeichnet: $a - b$. Die Differenz oder der Rest, auch wohl Exponent oder Name des Verhältnisses genannt, ist gleicher Art wie die mit einander verglichenen Zahlen und kann positiv oder negativ sein.

Wann das Eine, und wann das Andere? — und durch welche Ausdrücke werden beide Fälle im gemeinen Leben unterschieden? — B.

Auch die Aufgabe, das geometrische Verhältniß zweier Zahlen zu finden, stimmt mit einer früheren, nämlich mit derjenigen überein, den Quotienten gleichnamiger Zahlen zu berechnen, und wird auch wie diese bezeichnet: $\frac{a}{b}$, oder (weil unter diesem Zeichen meistens schon die Auflösung der Aufgabe verstanden wird) gewöhnlicher $a:b$. Der berechnete Quotient wird auch wohl der Exponent, Name des Verhältnisses genannt. Er ist immer eine unbenannte Zahl, nimmt die Maßgröße (den Divisor) als etwas Einfaches an und bestimmt die Art und Weise, wie sich aus ihr (ihm) die auszumessende Größe (der Dividend) erzeugt. Wird daher jene auch wirklich als Einheit gesetzt, so ist die Zahl, welche diese ausdrückt, zugleich der Exponent ihres Verhältnisses zur ersten. Nennt man den Exponenten e, also $a : b = e$; so drückt man das Verhältniß von a zu b eben so gewöhnlich auch in der Form $a = e \cdot b$ aus.
B.

4. Die beiden Größen oder Zahlen, deren Verhältniß zu einander angegeben wird, heißen Glieder des Verhältnisses (termini rationis), und zwar dasjenige, welches durch sein Verhältniß zum anderen bestimmt werden soll, a, (ebensowohl beim arithmetischen $a - b$, als beim geometrischen $a : b$) das Vorderglied (terminus antecedens), das andere, auf welches jenes erste bezogen, mit dem es verglichen wird, b, das Hinterglied oder das nachfolgende (t. consequens).

5. Das arithmetische Verhältniß zweier Zahlen bleibt unverändert, wenn zu beiden gleichviel zugelegt, oder von beiden gleichviel weggenommen wird.

$$a - b = (a \mp m) - (b \mp m).$$

Weßhalb?

Welche Veränderungen erleidet das arithmetische Verhältniß, wenn das Vorderglied allein oder das Hinterglied allein eine Vermehrung oder Verminderung erfährt?

Das geometrische Verhältniß zweier Zahlen ändert sich nicht, wenn beide mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt werden.

$$a : b = am : bm = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}.$$

Weßhalb?

Welche Veränderungen erleidet das geometrische Verhältniß, wenn entweder nur das Vorderglied oder nur das Hinterglied mit einer anderen Zahl außer 1 multiplicirt oder dividirt wird?

Der Multiplication beider Glieder eines geometrischen Verhältnisses mit derselben Zahl bedient man sich am häufigsten, wenn das eine oder wenn beide Glieder Brüche sind, und das Verhältniß in ganzen Zahlen ausgedrückt werden soll, — der Division, wenn die Glieder des Verhältnisses einen gemeinschaftlichen Factor haben, und dasselbe in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt, oder wenn eins dieser Glieder zur Einheit gemacht werden soll. So ist

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = ad : bc,$$

$$am : bm = a \;:\; b$$

und $a : b = \frac{a}{b} : 1 = 1 : \frac{b}{a}$.

Die in diesen Formeln liegenden Regeln sind in Worten auszudrücken — und auf Zahlenbeispiele anzuwenden.

§. 53.

Proportion, — Glieder derselben, — stetige, unterbrochene.

1. Die Zusammenstellung zweier gleicher Verhältnisse heißt eine **Proportion**, und zwar eine **arithmetische** oder **geometrische**, je nachdem die Verhältnisse arithmetische oder geometrische sind.

$$a - b = c - d,$$

$$a : b = c : d.$$ *)

Man liest diese Ausdrücke: »a verhält sich zu b (»a zu b«) wie c zu d« — auch wohl: »a, b, c und d stehen in (arithmetischer, geometrischer) Proportion,« und nennt die vier Zahlen (namentlich bei der geometrischen Proportion) **proportionirt**.

Zahlenbeispiele.

*) Statt der obigen Bezeichnung haben manche Schriftsteller, ganz unnöthiger Weise, die folgende eingeführt: $a : b :: c : d$.

2. a, b, c und d sind die vier Glieder (erstes, zweites, drittes, viertes Glied) der Proportion; a und d heißen die **äußeren**, b und c die **mittleren** oder **inneren**, a und c, so wie b und d, also die beiden Vorder- oder die beiden Hinterglieder der Verhältnisse, **ähnlichliegende** oder **homologe** Glieder der Proportion.

3. Sind die beiden mittleren Glieder einer Proportion einander gleich, so heißt dieselbe eine **stetige** (pr. continua),

$$a - b = b - d,$$
$$a : b = b : d,$$

im Gegentheil auch wohl eine **unterbrochene** oder **abgesonderte** (pr. discreta).

§. 54.

Die arithmetische Proportion.

Ueber den Zusammenhang unter den Gliedern einer Proportion und andere aus derselben abzuleitende Folgerungen hat man eine Reihe von Sätzen aufgestellt, von welchen hier nur die gebräuchlichsten angeführt werden sollen. Wie die Proportionen selbst nur Gleichungen von besonderer Form, so sind diese Sätze nur leichte Folgerungen aus den (im vorigen Abschnitte gelehrten) allgemeineren Sätzen und Regeln über die Umbildung und Auflösung von Gleichungen.

Von der arithmetischen Proportion gelten folgende Sätze.

1. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußeren der Summe der inneren Glieder gleich.

Wenn $a - b = c - d$, so ist
$$a + d = b + c.$$

Beweis? — Um denselben noch anschaulicher zu machen, setze man die Differenz $a - b = r$, also $a = b + r$, mithin, da auch $c - d = r$ sein soll, $c = d + r$, und drücke in dieser Bezeichnung die Voraussetzung und die Folgerung aus. — B.

2. Durch je drei Glieder der arithmetischen Proportion wird das vierte bestimmt. Die Berechnung desselben, je nachdem es Vorder- oder Hinterglied des Verhältnisses ist, stellen folgende Formeln dar:

wenn $a - b = x - d$, so ist

$x = a + d - b$,

und wenn $a - b = c - y$, so ist

$y = b + c - a$.

Die Regel in Worten auszudrücken. — B.

3. In der stetigen arithmetischen Proportion, $a - b = b - d$, ist das mittlere Glied, auch das arithmetische Mittel (der Durchschnitt) zwischen den beiden äußeren Gliedern genannt, der halben Summe dieser Glieder gleich, $b = \frac{a + d}{2}$.

Ableitung. — B.

Was nennt man im gemeinen Leben den Durchschnitt mehrer Zahlen?

Die Berechnung des arithmetischen Mittels kann auch der Formel $b = a - \frac{a - d}{2}$ oder $b = d + \frac{a - d}{2}$ folgen.

Die in diesen Formeln liegenden Regeln in Worten auszudrücken. — Zurückführung derselben auf die erste. — B.

4. Wenn zwei homologe Glieder einer arithmetischen Proportion gleich sind, so sind es auch die anderen, oder: zwei Größen, die zu der nämlichen dritten dasselbe arithmetische Verhältniß haben, sind einander gleich.

Wenn $a - b = a - x$,

oder $b - a = x - a$,

so ist $b = x$.

5. Wenn $a - b = c - d$, so ist auch

$b - a = d - c$, und

6. $a - c = b - d$.

7. Wenn ferner $a - c = b - d$

und $e - f = g - h$

$\vdots \qquad \vdots$

und $\underline{u - v = w - z;}$

so ist auch $(a + e + \ldots u) - (c + f + \ldots v) = (b + g + \ldots w) - (d + h + \ldots z)$.

8. Wenn $a - b = c - d$
und $b - e = d - f$
und $e - g = f - h$,

so ist auch $a - g = c - h$.

Die von Nro. 5 bis 7 durch Formeln ausgedrückten Sätze sind auch in Worte einzukleiden und zu beweisen. — B.

§. 55.

Die geometrische Proportion.

Das geometrische Verhältniß zweier Zahlen ist dasselbe, die Zahlen mögen benannte (natürlich gleich benannte) oder unbenannte sein. Denn der Exponent des Verhältnisses ist immer eine unbenannte Zahl. Um daher bei den nachfolgenden Sätzen durch die Rücksichten, welche das Benanntsein der Zahlen erfordert, nicht beschränkt zu sein, setzen wir voraus, alle Glieder der geometrischen Proportion seien unbenannte Zahlen. Unter dieser Voraussetzung gelten von derselben folgende Sätze.

1. Das Product der äußeren Glieder ist dem Producte der inneren gleich.

Wenn $a : b = c : d$,
so ist auch $ad = bc$.

Beweis?*) — Um denselben gleichsam augenfällig zu machen, setze man den Exponenten des Verhältnisses $a : b$, also auch des Verhältnisses $c : d = e$, folglich $a = be$ und $c = de$, und drücke nur in dieser Bezeichnung Voraussetzung und Folgerung aus. — B.

2. Durch je drei Glieder der geometrischen Proportion wird das vierte, die sogenannte **vierte geometrische Proportionale** bestimmt. Die Art, wie dasselbe gefunden wird, je nachdem

*) Bei diesem und den noch ferner geforderten Beweisen wird man wohl thun, um desto leichter in den aufgestellten Sätzen bloß besondere Anwendungen von den allgemeineren Sätzen des vorigen Abschnitts zu erkennen, die Verhältnisse in der gewohnten Form von Quotienten, also die Proportion

$a : b = c : d$ in der Form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ zu schreiben.

es als Vorder- oder Hinterglied des Verhältnisses angesetzt ist, geben die nachstehenden Formeln an.

Wenn $a : b = x : d$, so ist $x = \frac{ad}{b}$,

" $a : b = c : y$, " " $y = \frac{bc}{a}$.

Die Regel in Worten auszudrücken; — Ableitung derselben; — B.

Die Vorschrift, welche in diesen Formeln liegt, pflegt die **Regel de tri** (aus dem Italienischen regola de' tre) genannt zu werden. In den Rechnungen des gewöhnlichen Lebens, sofern man sich überall der umständlichen Form der Proportionen bedienen will, ist dieselbe von dem allerhäufigsten Gebrauch. Sie wird immer angewandt, um eine Größe zu bestimmen, welche zu einer gegebenen ein vorgeschriebenes Verhältniß hat.

In unzählig vielen Fällen stehen aber Größen in solcher Beziehung zu einander, daß in demselben Verhältniß, wie die eine, auch die andere zu- oder abnimmt: — so z. B. Größe (Gewicht, Umfang) und Preis einer Waare, Zinsen und Capital bei gleichem Zinsfuße, Zinsen und Dauer der Verzinsungszeit bei gleichem Capital und Zinsfuße, Größe und Dauer einer Arbeit bei gleicher Anzahl der Arbeiter, Größe der Arbeit und Zahl der Arbeiter bei gleicher Arbeitszeit, Länge des zurückgelegten Weges und Dauer der Bewegung bei gleicher Geschwindigkeit, gleichgerichteter Abstand je zweier Puncte convergirender gerader Linien und Entfernung dieser Puncte vom Durchschnittspuncte der beiden Linien u. dergl. m. — Solche Dinge, sagt man, stehen in **geradem, directem Verhältnisse** zu einander, oder sind **gerade, direct proportional**. Kennt man nur für irgend einen Werth der einen den entsprechenden Werth der anderen, so ist es eine Aufgabe der Regel de tri, für jeden beliebigen Werth der einen den zugehörigen Werth der anderen zu finden.

In anderen Fällen haben zwei Größen die Beziehung auf einander, daß in demselben Maße, wie die eine wächst, die andere abnimmt, und umgekehrt. So muß z. B. bei gleichem Flächeninhalt die Breite eines Rechtecks in demselben Maße geringer werden, wie seine Länge zunimmt; die Dauer einer Arbeit und die Zahl dazu verwendeter Arbeiter, Capital und Zinsfuß bei gleicher Zinsenmenge und gleicher Verzinsungszeit, Dauer und Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung bei gleicher Wegstrecke, die

Längen zweier Hebelarme und die Stärke auf ihre Enden senkrecht wirkender Kräfte im Zustande des Gleichgewichts sind Beispiele der nämlichen Art. Von solchen Dingen sagt man, sie stehen in umgekehrtem, indirectem Verhältnisse zu einander, oder sie seien umgekehrt (verkehrt), indirect proportional. Auch wenn nur zwei einander entsprechende Werthe solcher Größen gegeben sind, kann man vermittelst der Regel de tri für jeden beliebigen Werth der einen den zugehörigen Werth der anderen finden. Da man aber unter dieser Voraussetzung die beiden Werthe der einen Größe, um gleiche Verhältnisse zu bekommen, umgekehrt anordnen muß, wie die entsprechenden Werthe der anderen Größe; so nennt man die Regel, nach welcher aus drei Gliedern einer so zusammengesetzten Proportion das vierte zu berechnen ist, die umgekehrte (verkehrte) Regel de tri.

Wenn A und a zwei Werthe der einen, und B und b die entsprechenden Werthe der anderen Größe vorstellen; so erhält man, wenn diese Größen in geradem Verhältnisse zu einander stehen, die Proportion $A : a = B : b$, wenn in umgekehrtem, $A : a = b : B$. Ist die Proportion richtig angesetzt, so bleibt die Regel, aus drei Gliedern derselben das vierte zu finden, dieselbe.

B. — Welche Benennung bekommt, wenn die Proportion in benannten Zahlen angesetzt ist, das gesuchte Glied?

3. In der stetigen geometrischen Proportion ist das Product der äußeren Glieder dem durch Multiplication des mittleren Gliedes mit sich selbst entspringenden Producte gleich. Aus $a : b = b : d$ folgt $ad = bb$.

Wäre das mittlere Glied, die sogenannte mittlere (geometrische) Proportionale, das gesuchte, so müßte man das Product der äußeren Glieder in zwei gleiche Factoren zerlegen; z. B. aus $4 : x = x : 9$ folgt $xx = 36$, mithin $x = 6$. Ob aber jede Zahl als Product von zwei gleichen Factoren angesehen, und wie sie in solche zerlegt werden könne, bleibt einer späteren Untersuchung vorbehalten, bis zu deren Erledigung auch die allgemeine Lösung der vorliegenden Aufgabe, zwischen zwei Zahlen die mittlere (geometrische) Proportionale zu finden, aufgespart werden muß.

4. Wenn zwei homologe Glieder einer geometrischen Proportion einander gleich sind, so sind die beiden anderen ebenfalls gleich,

oder: zwei Zahlen (Größen), die zu der nämlichen dritten dasselbe geometrische Verhältniß haben, sind einander gleich.

Wenn $a : b = a : x$

oder $b : a = x : a$,

so ist $b = x$.

5. Wenn $a : b = c : d$,

so ist auch $am : b = cm : d$,

oder $a : bm = c : dm$,

oder $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$,

oder $a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$.

In einem Satze auszusprechen, was diese Formeln besagen; — Beweis desselben; — Anwendungen (wenn einige oder alle Glieder der Proportion Brüche sind, — homologe Glieder gemeinschaftliche Factoren haben, — oder ein Glied der Proportion $= 1$ gemacht werden soll).

6. Wenn $a : b = c : d$,

so ist auch $a : c = b : d$.

(Eine nach gerade veraltete Kunstsprache nennt diese Veränderung in der Form der Proportion permutando, durch Verwechslung geschehen.)

Beweis. — B.

Auch wenn die Glieder einer Proportion benannte Zahlen sind, bei dem sogenannten Regel de tri-Ansatze, erlaubt man sich wohl die angedeutete Verwechslung der Glieder, obgleich dadurch meistens ungleichartige Größen zu einem Verhältnisse zusammengeordnet werden. Anstatt z. B.

2 Pfd. : 9 Pfd. = 5 Thlr. : x Thlr.

anzusetzen, erlaubt man sich auch wohl den Ansatz

2 Pfd. : 5 Thlr. = 9 Pfd. : x Thlr.

Streng genommen hat ein solcher Ausdruck gar keinen Sinn, da ungleichartige Größen nicht mit einander verglichen werden können, folglich auch ein Verhältniß der einen zur anderen undenkbar ist. Um denselben gleichwohl gelten lassen zu können, muß man von der Benennung der Zahlen ganz absehen, so daß man nur Vergleichungen und Verhältnisse unbenannter Zahlen bekommt. In

16

diesem Sinne ist das vorige Beispiel so zu lesen: die Zahl der Pfunde verhält sich zu der Zahl von Thalern, welche ihren Werth bestimmen, das eine Mal wie das andere Mal.

Welche Benennung erhält das gesuchte Glied in einer wie die letzte geordneten Proportion?

7. Wenn $a : b = c : d$,

so ist auch $b : a = d : c$ (invertendo, durch Umkehrung).

Das Verhältniß $b : a$ nennt man das umgekehrte von $a : b$.

8. Wenn $a : b = c : d$,

so ist auch $(a+b) : b = (c+d) : d$ (componendo)

9. ferner $(a-b) : b = (c-d) : d$ (dividendo)

10. $(a+mb) : b = (c+md) : d$

11. $(a-mb) : b = (c-md) : d$

12. $(a+c) : (b+d) = a : b \; [= c : d]$

(antecedentes et consequentes summando)

13. $(a-c) : (b-d) = a : b \; [= c : d]$

(antecedentes et consequentes differentiando)

14. $(a+mc) : (b+md) = a : b \; [= c : d]$

15. $(a-mc) : (b-md) = a : b \; [= c : d]$

Die von Nro. 7 bis 15 aufgestellten Formeln sind aus der Voraussetzung $a : b = c : d$ abzuleiten, auf Zahlenbeispiele anzuwenden, und die in ihnen liegenden Sätze durch Worte auszudrücken.

Durch Verbindung dieser Formeln, Umstellung ihrer Glieder und auf andere Weise lassen sich noch viele andere Formeln ableiten, z. B.

$a : (a-b) = c : (c-d)$, (convertendo)

$(a+b) : (c+d) = (a-b) : (c-d)$, (aus 8. u. 9.)

$(a+c) : (b+d) = (a-c) : (b-d)$, (aus 12. u. 13.).

Es verlohnt sich aber der Mühe nicht, deren noch mehre aufzuzählen, da Jeder, wer mit der Umformung von Gleichungen bekannt ist, sich die jedesmal nöthigen leicht selbst entwickeln kann.

16. Die Zusammenstellung von mehr als zwei gleichen Verhältnissen nennt man eine fortlaufende Proportion; z. B.

$$a : b = c : d = e : f = g : h = \text{rc.}$$

Die Summe aller Vorderglieder einer fortlaufenden Proportion verhält sich zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

$$(a+c+e+g+\text{rc.}) : (b+d+f+h+\text{rc.}) = a : b \; [= c : d = \text{rc.}]$$

Die Ableitung dieses Satzes kann entweder durch wiederholte Anwendung des Nro. 12 aufgestellten, oder auf folgende Art geschehen. Man nenne den Exponenten der gegebenen Verhältnisse x, also $a:b = c:d = \text{ꝛc.} = x$, so ist

$$a = bx,\ c = dx,\ e = fx,\ g = hx \text{ ꝛc.}$$

folglich $$a+c+e+g+\text{ꝛc.} = bx+dx+fx+hx+\text{ꝛc.}$$
$$= (b+d+f+h+\text{ꝛc.}).x$$

und $$\frac{a+c+e+g+\text{ꝛc.}}{b+d+f+h+\text{ꝛc.}} = x = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ꝛc.}$$

Zahlenbeispiele. — Anwendung auf den geometrischen Satz: die Umfänge zweier ähnlicher Figuren verhalten sich eben so zu einander, wie irgend zwei ähnlich liegende Seiten derselben.

17. Die Multiplication zweier und mehrer Verhältnisse nennt man die **Zusammensetzung** derselben, und das dadurch abgeleitete Verhältniß des Products der Vorderglieder zu dem der Hinterglieder das aus den gegebenen **zusammengesetzte**. Von $a:b$ und $c:d$ $\left(\text{oder } \frac{a}{b} \text{ und } \frac{c}{d}\right)$ ist das zusammengesetzte Verhältniß $ac : bd$ $\left(\text{oder } \frac{ac}{bd}\right)$.

Werden die Verhältnisse der einen wie der anderen Seite zweier und mehrer Proportionen zusammengesetzt, so sind auch die abgeleiteten Verhältnisse einander gleich (oder die Glieder derselben stehen wieder in Proportion).

$$\begin{array}{ll} \text{Aus} & a : b = c : d \\ \text{und} & e : f = g : h \\ & \quad \vdots \qquad \vdots \\ \text{und} & \underline{m : n = p : q} \end{array}$$

folgt $(ae..m) : (bf..n) = (cg..p) : (dh..q)$.

Beweis? (§. 48. 4) — B.

Auch durch Division der Verhältnisse einer Proportion durch die einer anderen lässt sich eine neue Proportion ableiten: wie kann man aber dieselbe Proportion auch durch Zusammensetzung von Verhältnissen erhalten?

Durch Znsammensetzung der Verhältnisse stetiger Proportionen ergiebt sich wieder eine stetige Proportion. — B.

Wenn die Verhältnisse der einen Seite mehrer Proportionen so beschaffen sind, daß sich das Hinterglied des ersten als Vorderglied des zweiten, und so fort das Hinterglied jedes vorhergehenden Ver=

hältnisses als Vorderglied des nachfolgenden wiederholt, so erhält man das Verhältniß des ersten Gliedes zum letzten durch Zusammensetzung aller Verhältnisse der anderen Seite.

Wenn $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} = m : n$

$\mathfrak{B} : \mathfrak{C} = p : q$

$\mathfrak{C} : \mathfrak{D} = r : s$

so ist $\mathfrak{A} : \mathfrak{D} = mpr : nqs.$

Weßhalb?

Am häufigsten wird dieser Satz gebraucht, wenn eine Größe durch ihr Verhältniß zu einer zweiten, diese selbst wieder durch ihr Verhältniß zu einer dritten, überhaupt jede als Maß dem vorigen Verhältniß zum Grunde gelegte durch ihr Verhältniß zu einer neuen Größe bestimmt, und das Verhältniß der ersten zur letzten gesucht wird. Man bildet aus den gegebenen Verhältnissen Proportionen, indem man die verschieden benannten (übrigens gleichartigen) Größen in der Ordnung, wie sie eine durch die andere bestimmt werden, als Glieder der einen Seite (an die Stelle der vorhin gebrauchten Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ꝛc.) und die Zahlen, welche ihre Verhältnisse angeben, als Glieder der anderen Seite (an die Stelle der vorhin gebrauchten Buchstaben m, n, p, q ꝛc.) setzt, und multiplicirt hierauf die sämmtlichen Verhältnisse der zweiten Seite: das aus ihnen zusammengesetzte ist das verlangte. Auf die angezeigte Art sind z. B. folgende Verhältnisse angesetzt:

1 fl. Wiener W.	: 1 fl. Conv. M.	=	2 : 5	
1 fl. Conv. M.	: 1 ℛ Conv. M.	=	2 : 3	
1 ℛ Conv. M.	: 1 ℛ Court.	=	21 : 20	
1 ℛ Court.	: 1 ℛ Gold	=	100 : 112,5	
1 ℛ Gold	: 1 Grote G.	=	72 : 1	, und daraus

folgt 1 fl. W. W. : 1 Grote G. $= 2.2.21.100.72 : 5.3.20.112{,}5$

$= 448 : 25 = 17{,}92 : 1$

Uebrigens leuchtet ein, daß man Factoren, welche zugleich in der Reihe der Vorder- und Hinterglieder der zusammenzusetzenden Verhältnisse vorkommen, erst gegen einander aufheben darf, bevor man jede Reihe in ein Product zusammenzieht.

Weßhalb? — Auf vorstehendes Beispiel anzuwenden.

Noch gewöhnlicher aber drückt man die gegebenen Verhältnisse durch Gleichungen aus, welche bestimmen, wie viele Einheiten der einen Art einer gewissen Menge von Einheiten der anderen Art gleich sind. Anstatt z. B. zu sagen:

1 fl. Wiener W. : 1 fl. Conv. M. = 2 : 5

setzt man 5 fl. Wiener W. = 2 fl. Conv. M.,

und allgemein statt $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} = m : n$

setzt man $n \,.\, \mathfrak{A} = m \,.\, \mathfrak{B}$,

was in diesem Falle zu lesen ist: »n Einheiten der Art $\mathfrak{A}$ machen m Einheiten der Art $\mathfrak{B}$ aus.«

Wird nun in jeder folgenden Gleichung die Benennung, mit welcher die vorige schloß, wieder aufgenommen, so giebt das Product aller Zahlen der ersten Seite die Menge zuerst genannter Einheiten an, welche der durch das Product aller Zahlen der zweiten Seite bestimmten Menge zuletzt genannter Einheiten gleich ist. Das vorige Beispiel nimmt hiernach folgende Gestalt an:

5 fl. Wiener W. = 2 fl. Conv. M.
3 fl. Conv. M. = 2 ℛ Conv. M.
20 ℛ Conv. M. = 21 ℛ Cour.
112,5 ℛ Court. = 100 ℛ Gold
1 ℛ Gold = 72 Grote G.

mithin 5 . 3 . 20 . 112,5 fl. W. W. = 2 . 2 . 21 . 100 . 72 Grote G.
oder 25 fl. W. W. = 448 Grote G.,

und das oben gebrauchte allgemeine Schema gestaltet sich so:

$$\begin{aligned} n \,.\, \mathfrak{A} &= m \,.\, \mathfrak{B} \\ q \,.\, \mathfrak{B} &= p \,.\, \mathfrak{C} \\ s \,.\, \mathfrak{C} &= r \,.\, \mathfrak{D} \end{aligned}$$

folglich $nqs \,.\, \mathfrak{A} = mpr \,.\, \mathfrak{D}$.

Auch bei diesem Ansatze lassen sich wieder gleiche Factoren der einen und anderen Zahlenreihe vor der Berechnung des gesuchten Verhältnisses gegen einander aufheben.

Wollte man den Werth einer Einheit der zuerst genannten Art nach den angegebenen Verhältnissen in Einheiten der letzten Art ausdrücken, so müsste man das Product aller Zahlen der zweiten Reihe durch das Product aller Zahlen der ersten Reihe dividiren.

Aus 5 . 3 . 20 . 112,5 fl. W. W. = 2 . 2 . 21 . 100 . 72 G. G. oder 25 fl. W. W. = 448 G. G.

folgt $1 \text{ fl. W. W.} = \dfrac{2 . 2 . 21 . 100 . 72}{5 . 3 . 20 . 112{,}5}$ G. G. oder $1 \text{ fl. W. W.} = \dfrac{448}{25}$ G. G.

und aus $nqs \,.\, \mathfrak{A} = mpr \,.\, \mathfrak{D}$ folgt $\mathfrak{A} = \dfrac{mpr}{nqs} \mathfrak{D}$.

Sollte also der Werth irgend einer beliebigen Zahl (u) von Einheiten der ersten Art (A) in Einheiten der letzten Art (D) ausgedrückt werden, so brauchte man nur noch den genannten Quotienten mit dieser Zahl zu multipliciren.

Unter den vorigen Annahmen, aus welchen $\mathfrak{A} = \frac{mpr}{nqs} \cdot \mathfrak{D}$ folgte, sind $u \cdot \mathfrak{A} = \frac{umpr}{nqs} \mathfrak{D}$.

Man pflegt daher auch diese Aufgabe als sogenannten **Fragesatz** gleich mit in die Reihe der Gleichungen und zwar obenan zu stellen (etwa: $? \mathfrak{D} = u . \mathfrak{A}$, oder $x . \mathfrak{D} = u . \mathfrak{A}$, »wie viel D« rc.), macht sich's fortan zur Regel, jede folgende Verhältnißangabe mit derjenigen Benennung wieder anzufangen, mit welcher die vorhergehende aufhörte, und zuletzt in der Benennung zu schließen, mit welcher der Fragesatz anhob, und findet alsdann die gesuchte Zahl, **indem man das Product aller Zahlen der zweiten Reihe durch das Product aller Zahlen der ersten Reihe dividirt.**

$$\begin{array}{rcl} x . \mathfrak{D} & = & u . \mathfrak{A} \\ n . \mathfrak{A} & = & m . \mathfrak{B} \\ q . \mathfrak{B} & = & p . \mathfrak{C} \\ s . \mathfrak{C} & = & r . \mathfrak{D} \\ \hline \end{array}$$

also $$u . \mathfrak{A} = x . \mathfrak{D} = \frac{umpr}{nqs} \mathfrak{D}.$$

$$\begin{array}{rcl} ?\ \text{Ducaten Gold} & = & 600\ \text{fl. W. W.} \\ 5\ \text{fl. W. W.} & = & 2\ \text{fl. Conv. M.} \\ 3\ \text{fl. Conv. M.} & = & 2\ \text{Thlr. Conv. M.} \\ 20\ \text{Thlr. Conv. M.} & = & 21\ \text{Thlr. Court.} \\ 112{,}5\ \text{Thlr. Court.} & = & 100\ \text{Thlr. Gold} \\ \hline \end{array}$$

$$600\ \text{fl. W. W.} = \frac{600 . 2 . 2 . 21 . 100}{5 . 3 . 20 . 112{,}5}\ \text{Thlr. Gold}$$
$$= 149\tfrac{1}{3}\ \text{Thlr. G.}$$

Diese Vorschrift ist unter dem Namen **Kettenregel** bekannt und für viele der gebräuchlichsten Rechnungen z. B. Reductionen verschiedener Maße, Gewichte, Geldsorten rc. auf einander (wenn ihre Verhältnisse zu einander nicht unmittelbar gegeben sind), Wechselcoursberechnungen und dergl. ganz bequem. Eben so leicht oder noch leichter kann man indessen bei einiger Uebung solche Rechnungen gleich in Form eines einzigen Bruchs ansetzen und danach ausführen, ohne irgend einen Vortheil der Kettenregel aufzugeben.

B.

Nicht selten erlaubt man sich, beim Kettensatz auch ungleichartige Größen einander gleich zu setzen. Dieß darf jedoch nur unter dem Vorbehalt einer Ergänzung des Sinnes geschehen, wodurch die erforderliche Gleichartigkeit herbeigeführt wird.

Wenn man z. B. ansetzt

? *f* = 14 Pfd.
3 Pfd. = 5 fl. ꝛc.;

so muß man lesen: wie viele *f* beträgt der **Preis** von 14 Pfd., wenn der Preis von 3 Pfd. = 5 fl. ist ꝛc.

Auf der Zusammensetzung von Verhältnissen beruht auch die Regula quinque, septem ꝛc. Es verlohnt sich jedoch nicht der Mühe, bei ihrer Auseinandersetzung zu verweilen, da die Aufgaben, bei welchen sie angewandt werden, einfacher und leichter auch ohne den umständlichen Proportionenansatz zu lösen sind.

Anmerk. Wenn eine Reihe von mehr als zwei Größen zu einer Reihe eben so vieler Größen in solcher Beziehung steht, daß die entsprechenden, paarweise mit einander verglichen, gleiche Verhältnisse geben; so pflegt man dieses abgekürzt dadurch auszudrücken, daß man die Glieder der einen Reihe in derselben Ordnung, wie die entsprechenden Glieder der anderen Reihe, mit zwischengesetzten Verhältnißzeichen (:), zusammenstellt und beide Reihen durch das Gleichheitszeichen verbindet; z. B. der Ausdruck

$$A : B : C = a : b : c$$

schließt die Proportionen $A:B = a:b$ und $A:C = a:c$ oder $B:C = b:c$ in sich.

§. 56.

Proportionalität stetiger Grösen.

1. Wenn man zwei stetige Größen, **A** und **B**, einander proportional setzt, so nimmt man an, daß alle Werthe der einen zu den entsprechenden Werthen der anderen ein feststehendes

Verhältniß, a : b haben.*) Für solche Werthe beider Größen, welche in Beziehung auf die zum Grunde gelegten Einheiten durch bestimmte Zahlen ausgedrückt werden können, ist diese Annahme unbedingt zulässig. Es ist aber nicht bloß denkbar, sondern wird sogar streng erwiesen,**) daß eine stetige Größe auch solcher Werthe fähig ist, welche durch ein angenommenes Maß weder im Ganzen, noch durch irgend einen aliquoten Theil desselben erschöpfend gemessen, mithin auch in Beziehung auf dieses als Einheit weder durch eine ganze noch durch eine gebrochene Zahl, folglich überall durch keine Zahl ausgedrückt werden können. Man nennt solche Werthe **irrational**, weil sie kein angebbares Verhältniß (ratio) zu der gewählten Einheit haben.***) — Gilt nun auch von solchen Werthen proportionaler Größen noch die Behauptung, daß die einander entsprechenden das festgesetzte Verhältniß haben?

Zunächst ist klar, daß einem irrationalen Werthe der einen Größe **A** — er heiße $\mathfrak{A}$ — auch nur ein irrationaler Werth der zweiten Größe **B** — er heiße $\mathfrak{B}$ — zugehören könne. Denn hätte dieser, $\mathfrak{B}$, zu seiner Einheit ein angebbares, durch eine bestimmte Zahl **n** auszudrückendes Verhältniß; so folgte rückwärts, daß auch der zugehörige Werth der ersten Größe, $\mathfrak{A}$, zu seiner Einheit in dem nämlichen Verhältniß stehen, also, der Annahme zuwider, rational sein müßte.

Wenn nämlich die einander entsprechenden Maße der Größen **A** und **B** durch α und β bezeichnet werden, mithin $\alpha : \beta = a : b$,

*) Oder, was damit einerlei ist, daß je zwei Werthe der einen **A** und **A'** sich zu einander eben so verhalten, wie die entsprechenden Werthe der anderen **B** und **B'**; denn aus $A : B = a : b$ und $A' : B' = a : b$ folgt $A : B = A' : B'$ oder $A : A' = B : B'$. — Der im Text absichtlich vorgezogene Ausdruck setzt voraus, daß die beiden Größen **A** und **B** gleichartig seien, weil sie sonst keine Vergleichung zulassen, oder, wenn dieß nicht der Fall ist, daß man statt ihrer selbst die zu ihrer Bestimmung dienenden Zahlen als unbenannte mit einander vergleiche.

**) in der Geometrie z. B. von geraden Linien.

***) Mehr darüber im zehnten Abschnitte §. 61.

und $\mathfrak{B} = n.\beta$ gesetzt würde; so wäre der zu $\mathfrak{B}$ gehörige Werth der Größe A durch die Proportion

$$x : n.\beta (= a : b) = \alpha : \beta \text{ gegeben,}$$

folglich $\quad x = n.\alpha$; und dieser Werth soll $\mathfrak{A}$ sein. Es müßte also $\mathfrak{A} = n.\alpha$, d. h. ein (rationales) Vielfaches der ganzen oder eines bestimmten Theils der Einheit sein, da es doch als irrational angenommen ist.

Nun aber läßt sich beweisen, daß **die einander entsprechenden irrationalen Werthe proportionaler Größen**, hier $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, **in demselben Verhältnisse zu einander stehen müssen, wie irgend zwei zusammengehörige, durch Zahlen bestimmbare Werthe derselben Größen**, hier A und B, und zwar in dem gegebenen Verhältnisse a : b.

Denn erstens leuchtet ein, daß von zwei proportionalen Größen mit der einen stets auch die andere gleichzeitig zu- oder abnehmen muß. Wenn z. B. von den beiden proportionalen Größen A und B die eine, etwa A, um ein Stück p zunimmt, so kann die andere, B, weder unverändert bleiben, noch geringer werden, etwa um das Stück q. Denn da A : B = a : b sein soll, so kann weder (A + p) : B, noch (A + p) : (B — q) = a : b sein

Um wie viel nämlich würden die Verhältnisse (A + p) : B und (A + p) : (B — q) von dem ersten A : B verschieden sein? und wie viel muß B zunehmen, um wieder zu A + p in dasselbe Verhältniß zu treten, wie B zu A?

Wie ist der vorige Schluß abzuändern und zu erweisen, wenn A, statt um p zuzunehmen, eben so viel abnehmen sollte?

Stellen nun α und β zwei einander enrsprechende Werthe der Größen A und B von beliebiger Kleinheit vor, so daß folglich $\alpha : \beta = a : b$ ist; so läßt sich jederzeit eine Zahl m so bestimmen, daß $m.\alpha < \mathfrak{A}$ und $(m + 1).\alpha > \mathfrak{A}$ wird, oder daß $\mathfrak{A}$ zwischen den beiden Grenzen $m.\alpha$ und $(m + 1).\alpha$ liegt. Die ihnen entsprechenden Werthe der Größe B sind $m.\beta$ und $(m+1).\beta$. Zwischen diesen muß $\mathfrak{B}$ liegen. Denn wäre $\mathfrak{B} < m.\beta$, so müßte die Größe B von dem Werthe $m.\beta$ bis $\mathfrak{B}$ abgenommen haben, während A von $m.\alpha$ bis $\mathfrak{A}$ zugenommen haben sollte, und wäre $\mathfrak{B} > (m+1).\beta$, so hätte B von $\mathfrak{B}$ bis $(m+1).\beta$ abnehmen müssen, während die gleichzeitige Aenderung des A eine Zunahme von 𝔄 bis $(m+1).\alpha$ gewesen wäre. Beides streitet gegen den eben bewiesenen Satz. Diese Grenzwerthe haben übrigens gegen einander dasselbe Verhältniß, wie alle zusammengehörigen meßbaren Werthe der Größen **A** und **B**, nämlich $m.\alpha : m.\beta = (m+1).\alpha : (m+1).\beta$ $[=\alpha:\beta] = a:b$. — Es läßt sich nun endlich auch zeigen, daß nur der irrationale Werth 𝔅 selbst, und kein auch noch so wenig von ihm verschiedener, das nämliche Verhältniß zu dem entsprechenden Werthe 𝔄 besitze. Denn angenommen, z sei ein beliebig kleines Stück, welches entweder dem 𝔅 zugelegt, oder von ihm abgenommen werden müßte, damit im ersten Falle die Summe $𝔅 + z$, oder im zweiten Falle die Differenz $𝔅 - z$ zu 𝔄 das feststehende Verhältniß bekäme, mithin entweder $𝔄:(𝔅+z) = a:b$, oder $𝔄:(𝔅-z) = a:b$ würde; so ließe sich doch jederzeit das β durch entsprechende Verminderung des α noch kleiner als z machen, so daß im ersten Falle nicht bloß $m.\beta$, sondern auch $(m+1).\beta$ kleiner als $(𝔅+z)$, und im zweiten Falle nicht bloß $(m+1).\beta$, sondern auch $m.\beta$ größer als $(𝔅-z)$ werden würde. Sowohl $(𝔅+z)$ als auch $(𝔅-z)$ würde demnach außerhalb der Grenzen liegen, welche den um 𝔄 gezogenen entsprachen, und nur 𝔅 selbst kann immer zwischen ihnen bleiben, wie nahe man sie auch einander bringen möchte. Innerhalb dieser Grenzen muß sich aber, dem Vorhergehenden zufolge, schlechterdings der Werth der Größe **B** halten, welcher 𝔄 nach dem Verhältniß **b : a** entsprechen soll. Da nun bloß 𝔅 unter allen Umständen, nicht aber $(𝔅 + z)$ oder $(𝔅 - z)$, dieser Bedingung genügt; so kann auch nur 𝔅 selbst das angegebene Verhältniß zu 𝔄 besitzen, d. h. $𝔅 : 𝔄 = b : a$ oder $𝔄 : 𝔅 = a : b$.

Stetige Größen von solcher gegenseitigen Beziehung, daß die Werthe der einen immer in gleichem Verhältniß zu einander stehen, wie die entsprechenden Werthe der anderen, nennt man gleichförmige. Gleichförmigkeit und Proportionalität stetiger Größen sind also gleichbedeutende Ausdrücke.

2. Dem vorhin bewiesenen Satze, daß von zwei stetigen proportionalen Größen mit der einen gleichzeitig auch die andere wachsen oder abnehmen muß, läßt sich noch die Bestimmung hinzufü-

gen, daß die einander entsprechenden Aenderungen beider Größen das nämliche Verhältniß zu einander haben, wie diese Größen selbst.

Denn bezeichnen **A** und **A'** zwei Werthe der einen, und **B** und **B'** die zugehörigen Werthe der anderen Größe, also daß

$$A : B = A' : B' \; [= a : b] \text{ ist,}$$

so folgt daraus, daß auch

$$(A - A') : (B - B') = A : B \; [= a : b] \text{ ist.}$$

Nach welchem früheren Satze?

Weßhalb braucht die allgemeine Formel nicht Rücksicht darauf zu nehmen, ob **A** größer oder kleiner als **A'** angenommen wird.

3. Weiter ergiebt sich, daß von gleichförmigen Größen je zwei beliebige Stücke der einen zu den entsprechenden Stücken der anderen, oder diese wie jene unter sich, gleiches Verhältniß haben.

Werden nämlich durch **A**, **A'**, **A''** und **A'''** vier Zustände der einen und durch **B**, **B'**, **B''** und **B'''** die entsprechenden Zustände der anderen bezeichnet, so ergiebt sich aus der fortlaufenden Proportion

$$A : B = A' : B' = A'' : B'' = A''' : B''', \text{ daß}$$

auch $(A - A') : (B - B') = (A'' - A''') : (B'' - B''') \; [= A : B]$,

oder $(A - A') : (A'' - A''') = (B - B') : (B'' - B''')$ sei.

Gleichen Stücken der einen entsprechen auch gleiche Stücke der anderen. Ist $A - A' = A'' - A'''$, so ist auch $B - B' = B'' - B'''$.

4. Umgekehrt ist es ein Merkmal der Gleichförmigkeit oder Proportionalität zweier Größen, wenn mit gleichen Zu- oder Abnahmen der einen auch gleiche Zu- oder Abnahmen der anderen verbunden sind.

Denn versteht man unter α eine beliebige Aenderung der ersten Größe **A**, unter β die entsprechende Aenderung der zweiten Größe **B**; so folgt aus der Voraussetzung, daß wie die erste um

$$\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha \ldots n\alpha,$$

die zweite um $\beta,\ 2\beta,\ 3\beta \ldots n\beta$

zu- oder abnimmt. Wird nun, da α willkührlich zu bestimmen ist,

$\alpha = \frac{1}{n} A$ oder $A = n\alpha$ gesetzt, so läßt sich A durch n maliges Wegnehmen des α auf seinen Anfang (oder Nullzustand) zurückführen, und dem entsprechend wird auch B durch n maliges Wegnehmen des β auf den gleichzeitigen Zustand, d. h. ebenfalls auf seinen Anfang oder Nullzustand zurückgebracht, wofern nicht jenseits dieser Grenzen noch ein von A unabhängiges Stück desselben liegt, welches dann natürlich von der Beziehung gegenseitiger Proportionalität ausgeschlossen ist. Dem $A = n\alpha$ entspricht daher ein $B = n\beta$. Jeder andere, durch α meßbare Werth des A — er heiße A′ — läßt sich dann unter der Form $A + r\alpha$ darstellen, wo r jede beliebige Zahl bedeutet, und ihm entsprechend muß B den Werth $B' = B + r\beta$ annehmen. Mithin ist

$$A : B = A' : B'$$
$$[= n\alpha : n\beta = (A + r\alpha) : (B + r\beta) = \alpha : \beta]$$

Das Verhältniß aber, welches zwischen den durch α und β meßbaren Werthen der Größen A und B stattfindet, besteht auch, wie wir wissen, für alle in Bezug auf diese Einheiten irrationalen Werthe derselben.

Auch aus der Proportionalität gleichzeitiger Aenderungen stetiger Größen kann auf die Proportionalität der ganzen Größen geschlossen werden. — Wie?

Zweites Hauptstück.

Die Lehre von den Potenzen.

Neunter Abschnitt.

Grundbegriffe von den Potenzen, ihre Bezeichnung, und Bestimmung der Aufgaben, zu welchen diese Zahlform Veranlassung giebt.

---

§. 57.

Begriff der Potenz; Wurzel; Exponent. — Bezeichnung der Potenzen.

1. Die Lehre von den vier einfachen Rechnungsarten darf als beendigt angesehen werden, nachdem die Begriffe und allgemeinen Gesetze derselben, die Regeln ihrer Ausführung mit den verschiedenen Arten der Zahlen, und die Grundsätze über die zweckmäßigste Art ihrer Anwendung zur Lösung bestimmter Aufgaben, so weit sie dazu ausreichen, entwickelt sind. — Im Begriffe der Zahl ist nur der Unterschied zwischen ganzen und gebrochenen Zahlen begründet. Es war also nur zu zeigen, wie mit diesen jede der vier Grundoperationen auszuführen ist. Der Buchstaben und Rechnungszeichen bediente man sich dabei, um allgemeine Regeln bequem und übersichtlich auszudrücken. Diese Regeln wurden zugleich auf solche Formen ausgedehnt, welche Zahlen als Resultate erst noch mit anderen vorzunehmender Operationen darstellen. Das Rechnen mit künstlich, gebildeten und bezeichneten Zahlen erforderte nur eine besondere Anwendung der vorigen Regeln, wie denn die Bildung und Bezeichnung der Zahlen nach den Regeln eines Systems überall

nur ein Hülfsmittel war, um auch größere Zahlen bestimmt und leicht aufzufassen und darzustellen, und das Rechnen mit ihnen auf ein Rechnen mit kleineren Zahlen zurückzubringen. Erst das Bedürfniß völlig allgemeiner Darstellung arithmetischer Verhältnisse führte die Unterscheidung einer Zählung im entgegengesetzten Sinne herbei, wonach auch die Beziehung der Zahlen auf einander als Merkmal mit in ihren Begriff aufgenommen, und durch die Beschaffenheitswörter »positiv und negativ« bezeichnet wurde. In Folge dieser Erweiterung des Begriffs der Zahlen mußten auch die Regeln der vier Grundoperationen entsprechend erweitert werden. Weßhalb endlich bei den Anwendungen der vier Grundoperationen zur Lösung bestimmter Aufgaben nur von einer Classe derselben die Rede gewesen, ist gehörigen Orts angezeigt. — Da nun bewiesen ist (§. 6. 3), daß es nicht mehr als die bekannten vier einfachen Rechnungsarten geben könne; so lässt sich ein weiterer Fortschritt für arithmetische Untersuchungen nur durch die Bildung künstlicher, höherer Zahlformen gewinnen.

Auch solche Zahlformen sollen wieder zur Darstellung von Zahlen dienen, können also nur Resultate bestimmter Zahlenverknüpfungen sein. Dabei muß das Gesetz ihrer Bildung möglichst einfach und einer kurzen Bezeichnung fähig sein. Und wie schon der Begriff der Zahl allein auf der Vorstellung der Wiederholung eines Dinges beruhte, welche zunächst bloß den Begriff der ganzen, und erst in umgekehrter Beziehung aufgefaßt, den der gebrochenen Zahl ergab: so braucht zur Bildung höherer Zahlformen auch nur der Weg der Zusammensetzung eingeschlagen zu werden, indem erst, wenn die bestimmte Art und Weise der Zusammensetzung bekannt ist, sich mittelbar, und dann von selbst, die umgekehrte Vorstellung der Zerlegung (Zersetzung, Wiederauflösung) des Zusammengesetzten entwickelt. Man ist demnach bloß auf die beiden verbindenden Operationen, die Addition und Multiplication, angewiesen. Wie nun die Bildung der Zahl von dem wiederholten Setzen eines beliebigen Etwas, der Einheit, ausging; so wäre der einfachste Fortschritt, eine Zahl selbst gleichwie die Einheit wiederholt zu denken, die erhaltene Menge gleicher Zahlen zu einem Inbegriff zusammenzufassen und diesen unter eigenthümlichem Namen und Zeichen als neue, höhere Zahlform anzunehmen. Diese Idee ist aber als besonderer Fall der Multiplication (wenn der Multiplicator eine ganze Zahl ist) schon verwirklicht, die beschriebene Zahlform ein Product, dessen Bezeichnung bekannt, und kein Bedürfniß neuer Regeln für das Rechnen mit Formen dieser Art vorhanden.

Es bleibt mithin zur Bildung höherer Zahlformen nur noch ein Weg übrig, der durch Multiplication. Man setze eine Zahl wiederholt als Factor (nicht als Theil), und gebe dem entstehenden Producte lauter gleicher Factoren einen eigenen Namen und eigene Bezeichnung. Die Kenntniß dieses Factors und die Angabe, wie viel mal sich derselbe im Producte wiederholen soll, genügt, um dieses letztere vollständig zu bestimmen; und umgekehrt, wenn ein solches Product und die Zahl, welche anzeigt, wie viele gleiche Factoren es enthalte, gegeben ist, darf die Aufgabe gestellt werden, die Größe des einzelnen Factors zu bestimmen. In der That sind solche Zahlformen, Producte gleicher Factoren, die am häufigsten vorkommenden und wichtigsten Bestandtheile zusammengesetzterer Zahlenverknüpfungen; schon in den höheren Einheiten jedes Zahlensystems haben sich dieselben verwirklicht; (Nachzuweisen) und in den letzten beiden Abschnitten ist es mehrfach angedeutet (z. B. §. 55. 3), daß die Aufgabe, durch Zerlegung einer Zahl in eine bestimmte Menge gleicher Factoren die Größe eines solchen Factors zu finden, nicht selten vorkomme, und zur Lösung derselben die bisherigen Regeln der vier Grundoperationen noch nicht ausreichen.

2. Man nennt nun ein Product aus einer bestimmten Menge gleicher Factoren eine **Potenz** (Dignität, Würde) eines solchen Factors, diesen selbst, sofern er bei der Bildung der Potenz zum Grunde liegt, ihre **Wurzel** oder ihren **Grundfactor**, und die Zahl, welche anzeigt, wie viele gleiche Factoren in der Potenz vorhanden sind, **Exponent** oder **Grad** derselben.

3. Um eine Potenz zu bezeichnen, setzt man das Zeichen des Exponenten zur Rechten oben neben das Zeichen der Wurzel oder

des Grundfactors; z. B. schreibt man $5 . 5 . 5 = 5^3$, und liest dieses Zeichen: »5 zur dritten Potenz« oder: »5 auf die Potenz des dritten Grades erhoben.« Allgemein

$\overset{\text{n mal}}{a . a . a \ldots a}$ wird geschrieben a^n und gelesen: »a zur nten Potenz« oder: »a auf die Potenz nten Grades erhoben,« auch wohl: »die nte Potenz von a.«

§. 58.

Bestimmung der Aufgaben, zu welchen der Begriff der Potenz Veranlassung giebt.

1. Der Begriff der Potenz setzt eine Beziehung zwischen drei Zahlen fest, dem Grundfactor oder der Wurzel, dem Exponenten oder Grade, und der berechneten Potenz oder dem fertigen Producte, welches die Wurzel so oft als Factor enthält, als der Exponent anzeigt; z. B. $5^3 = 125$; allgemein $a^n = A$. Jede von diesen drei Zahlen kann als die gesuchte angenommen werden, während die beiden anderen gegeben sind. Daraus entspringen drei verschiedene Aufgaben.

Die erste fordert die Berechnung der Potenz, wenn Wurzel und Exponent gegeben sind, und führt den Namen Potenzirung oder Erhebung (einer gegebenen Zahl) zur Potenz (eines vorgeschriebenen Grades); z. B.

$$5^3 = x \quad [= 125];$$

allgemein $\quad a^n = x \quad [= A].$

Offenbar kommt die Lösung dieser Aufgabe auf eine Anwendung der Multiplicationsregeln zurück.

2. Die zweite Aufgabe entsteht, wenn eine Zahl als Potenz eines bestimmten Grades gegeben, und deren Wurzel oder Grundfactor gesucht wird. Sie hat den Namen Wurzelausziehung erhalten und verlangt, daß die gegebene Zahl in so viele gleiche Factoren zerfällt werde, als der gleichfalls gegebene Grad der Potenz, welcher nun auch Grad der gesuchten Wurzel genannt wird, vorschreibt;

z. B. $\quad y^3 = 125 \quad [y = 5];$

allgemein $\quad y^n = A \quad [y = a].$

Man drückt indessen diese Forderung gewöhnlich dadurch aus, daß man vor die Zahl, aus welcher die Wurzel eines bestimmten Grades gezogen werden soll, das Zeichen $\sqrt{}$ (ein gedehntes r, Andeutung des lateinischen Wortes radix), und in die Oeffnung dieses Zeichens den Grad der gesuchten Wurzel setzt; z. B.

$$\sqrt[3]{125} = y \quad [= 5];$$

allgemein $$\sqrt[n]{A} = y \quad [= a].$$

Diese Ausdrücke werden gelesen: »Wurzel dritten Grades aus 125« und: »Wurzel des nten Grades aus A.«

3. Drittens endlich können Wurzel und Potenz gegeben sein, um den zugehörigen Exponenten zu bestimmen; z. B.

$$5^z = 125 \quad [z = 3];$$

allgemein $$a^z = A \quad [z = n].$$

Man nennt diese Aufgabe Exponentiation. Sie kann erst dann befriedigend gelöst werden, wenn schon die beiden vorhergehenden Aufgaben in ihrem ganzen Umfange erörtert sind, und wird auch dann, aus Rücksichten der practischen Brauchbarkeit, nur in einer sehr beschränkten Voraussetzung gelöst werden, wobei sich noch eine neue Kunstsprache und Bezeichnung ergeben wird.

Zehnter Abschnitt.

Erhebung zum Quadrat und Ausziehung der Quadratwurzel.

---

§. 59.

Allgemeine Sätze über die Erhebung einer Zahl zum Quadrat.

Potenzirung und Wurzelausziehung stehen in ähnlichem Verhältnisse zu einander, wie Multiplication und Division: was jene durch Zusammensetzen bildet, löst diese wieder auf. Das Besondere beider Rechnungsarten hängt hauptsächlich von dem Grade der zu bildenden oder aufzulösenden Potenz ab. Die Regeln der Wurzelausziehung eines bestimmten Grades sind daher aus denen für die Erhebung zur Potenz desselben Grades abzuleiten, und dabei ist mit dem einfachsten Falle natürlich der Anfang zu machen.

Die niedrigste Potenz einer Zahl aber, deren Berechnung verlangt werden kann, ist die vom zweiten Grade. — Die Potenz des ersten Grades einer Zahl ist diese Zahl selbst, $a^1 = a$. — Die Potenz des zweiten Grades einer Zahl nennt man ihr Quadrat (aus Gründen, welche in der Geometrie anzuführen sind). Dasselbe ist also ein Product aus zwei gleichen Factoren, a^2 (»Quadrat von a«) $= a \, . \, a$, und die Aufgabe, eine Zahl zum Quadrat zu erheben, nur ein besonderer Fall der Multiplication. Obwohl daher zur Lösung dieser Aufgabe die Anwendung bekannter Multiplicationsregeln genügt, so ist es doch zweckmäßig, wegen der umgekehrten Aufgabe, eine Zahl in zwei gleiche Factoren zu zerlegen, oder aus ihr die Quadratwurzel (Wurzel des zweiten Grades) zu ziehen, folgende Sätze noch ausdrücklich aufzuführen.

1. Jedes Quadrat ist positiv, die Wurzel mag positiv oder negativ sein.

$$(+a)^2 = + a^2 \quad [= (+a) . (+a)]$$
$$(-a)^2 = + a^2 \quad [= (-a) . (-a)]$$

Auf welchem früheren Satze beruht dieser?

2. Das Quadrat eines Productes ist ein Product aus den Quadraten seiner Factoren.

$$(a . b)^2 = a^2 . b^2$$

Dieser Satz ist auch als Regel auszusprechen und zu beweisen. — Zahlenbeispiele. $(4mn)^2 = ?$ ꝛc.

Man kann diesen Satz auch in umgekehrter Beziehung aussprechen und zur Umbildung geeigneter Ausdrücke gebrauchen.

Wie?

3. Das Quadrat eines Bruchs ist ein Bruch, dessen Zähler das Quadrat vom Zähler, dessen Nenner das Quadrat vom Nenner des gegebenen ist.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Ebenfalls als Regel auszudrücken und zu beweisen; dann auch in der Kunstsprache der Division wiederzugeben: »das Quadrat eines Quotienten ꝛc.« —

$\left(-\frac{2a}{5mx}\right)^2 = ?$ und ähnliche Beispiele.

Auch dieser Satz lässt sich in umgekehrter Beziehung ausdrücken und anwenden.

Wie?

Als besondere Eigenschaften der Quadrate gebrochener Zahlen sind folgende beachtenswerth.

a. Das Quadrat eines echten Bruchs ist ein kleinerer echter, das Quadrat eines unechten (wozu auch ganze Zahlen gerechnet werden können) ein größerer unechter Bruch.

b. Das Quadrat eines Bruchs, der in seiner kürzesten Form gegeben ist, erscheint selbst wieder in kürzester Form.

c. Die Quadrate unechter Brüche, welche nicht vollständig auch als ganze Zahlen ausgedrückt werden können, mithin bloß uneigentlich diese Form haben, können eben so wenig vollständig auf ganze Zahlen zurückgeführt werden. — Daraus folgt, daß nur die Quadrate ganzer oder auf solche zurückführbarer Zahlen selbst wieder ganze Zahlen werden können.

Alle diese Sätze sind zu beweisen und an Beispielen zu erläutern. (Bei den beiden letzten ist §. 14. 2 zu vergleichen.)

4. Das Quadrat einer zweitheiligen Größe enthält das Quadrat jedes Theils und das doppelte Product aus beiden.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Anmerk. Formeln für das Rechnen mit Zahlen, welche aus Theilen bestehen, sind völlig allgemein, wenn sie auch bloß eine Verbindung der Theile durch Addition, oder durch das Zeichen $+$ annehmen. Denn sobald der eine oder andere Theil subtrahirt werden sollte, kann man denselben unbeschadet der Rechnungsregel (nach §. 46) eben so gut als einen durch Addition zu verbindenden negativen Theil ansehen und ihn als solchen überall auch in der Auflösung setzen, wo sich denn nach bekannten Regeln auch das Vorzeichen des mit ihm behafteten Gliedes ergiebt. Anstatt z. B. hier noch die besondere Regel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

aufzustellen, kann man sie auch als besonderen Fall der vorigen unterordnen, indem man

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a.(-b) + (-b)^2$$

setzt, woraus sich gleichfalls

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ergiebt; — und so in ähnlichen Fällen.

Die obige und auch die in der Anmerkung gegebene Formel für $(a - b)^2$ sind auf ursprünglichem Wege durch Multiplication abzuleiten und an Zahlenbeispielen zu erläutern. Ferner sind

$$\left(2a - \frac{1}{2}m\right)^2, \quad \left(\frac{a + 5b}{3r}\right)^2, \quad \left(-\frac{3x + f}{7m - 2}\right)^2$$

und ähnliche Beispiele zu berechnen.

Um wie viel stehen die Quadrate zweier, nur um eine Einheit verschiedener Zahlen von einander ab?

Welche Eigenschaft besitzen daher die Summen der auf einander folgenden unpaaren Zahlen von 1 an, wie $1 + 3$, $1 + 3 + 5$ rc.?

Die schon früher (§. 12. 6) erwähnte Formel $(a + b).(a - b) = aa - bb$ ist auch in der neuen Bezeichnung und Kunstsprache auszudrücken.

Aus der vorstehenden Formel entwickelt sich auch leicht die Regel, nach welcher jede mehr als zweitheilige Zahl zum Quadrat zu erheben ist.

Bedeute a überhaupt eine Zahl, deren Quadrat, a^2, berechnet ist, und werde b als neuer Theil in die Wurzel aufgenommen, um das Quadrat dieser zweitheiligen Wurzel zu berechnen: so hat man zum Quadrate der ersten Zahl noch die beiden Producte $2ab$ und b^2, d. h. das doppelte Product aus ihr und dem neu hinzugekommenen Theile und das Quadrat dieses Theils hinzuzufügen. Diese Regel bleibt gültig, mag a eine einfache oder selbst schon aus Theilen zusammengesetzte Zahl sein. Man braucht sie daher nur wiederholt anzuwenden, wenn die Wurzel des zu bildenden Quadrats mehr als zwei Theile enthält, jeden folgenden Theil als neu hinzukommenden und den Inbegriff aller vorigen, deren Quadrat schon berechnet ist, als ersten betrachtend. Hiernach berechnet sich:

$$\begin{array}{lrr}
(a+b+c+d+\text{rc.})^2 = & a^2 & = a^2 \\
& +2ab+b^2 & +2ab+b^2 \\
& +2(a+b).c+c^2 & +2ac+2bc+c^2 \\
& +2(a+b+c).d+d^2 & +2ad+2bd+2cd+d^2 \\
& +\text{rc.} & +\text{rc.}
\end{array}$$

Diese Formel ist noch für das Hinzukommen eines fünften und sechsten Theils in die Wurzel zu erweitern.

$(5a-2b+{}^1\!/_2c)^2$; $\left(\frac{3c}{4m}+\frac{2b}{3c}-10m\right)^2$; $(7m+3x-\frac{1}{4m}+1)^2$ u. a. B.

§. 60.

Erhebung dekadisch gebildeter Zahlen zum Quadrat.

1. Eine der wichtigsten Anwendungen von der zuletzt aufgestellten Regel ist bei der Erhebung mehrziffriger, dekadisch gebildeter Zahlen zum Quadrat zu machen. Man könnte sich dazu auch der gewöhnlichen Multiplication bedienen. Da aber bei der umgekehrten Aufgabe, der Ausziehung der Quadratwurzel aus solchen Zahlen, eine Ziffer der Wurzel nach der anderen zu suchen sein wird; so ist schon aus diesem Grunde noch auf eine andere Methode zu denken, die bestimmter gesondert den Beitrag herausstellt, welchen jede Ziffer der Wurzel zu dem Quadrate liefert.

Beschränken wir uns zunächst auf die Aufgabe, mehrziffrige dekadisch gebildete **ganze** Zahlen zum Quadrat zu erheben.

Eine solche ist als Summe von Theilen ausgedrückt, deren jeder als Product einer Ziffer in die Einheit ihres Ranges angesehen werden kann. Z. B. $7436 = 7.1000 + 4.100 + 3.10 + 6$. Für diese Voraussetzung paßt also die vorige Formel. Das Quadrat des höchsten Theils, um damit anzufangen, ist das Quadrat der höchsten Ziffer von doppelt so hohem Range als die Wurzel: hier $(7.1000)^2 = 7^2.1000^2 = 49000000$. Denn gesetzt, die Einheit einer Ziffer sei mit n Nullen geschrieben oder vom Range n, so wird das Quadrat derselben eine Einheit mit doppelt so vielen, $2n$, Nullen oder vom Range $2n$ sein. Auf das Quadrat des höchsten Theils folgt der Ordnung nach das doppelte Product aus ihm in den zweiten Theil. Man kann dasselbe aus dem doppelten Producte der beiden höchsten Ziffern und dem Producte ihrer Einheiten zusammensetzen. Letzteres wird selbst wieder eine höhere Einheit, die mit so vielen Nullen zu schreiben ist, als die beiden Factoren zusammen enthielten, d. i. mit $2n - 1$ $[= n + n - 1]$ Nullen, da die höchste Einheit deren n, mithin die folgende, als nächstniedrigere, nur noch $n - 1$ enthält. Das doppelte Product der beiden höchsten Ziffern zählt folglich Einheiten der $(2n - 1)$ten oder der nächstniedrigeren Ordnung, wie das vorhergehende Quadrat. Im obigen Beispiele ist dasselbe $= 2.7.4.1000.100 = 5600000$. Hierauf folgt das Quadrat des zweiten Theils, oder das Quadrat der zweiten Ziffer von doppelt so hohem Range wie diese, d. i. vom $(2n - 2)$ten Range, da die Wurzel den $(n - 1)$ten hatte — wiederum der nächstniedrigeren Ordnung angehörend, wie das vorhergehende Product. Im vorigen Beispiele ist es $(4.100)^2 = 4^2.100^2 = 160000$. Der durch die beiden höchsten Ziffern bezeichnete Theil der Zahl (74.100) ist nun als erster, der nächste (3.10) als zweiter Theil anzusehen. Dem fertigen Quadrate des ersten ist also wieder das doppelte Product aus beiden, $2.74.3.100.10 = 444000$, und das Quadrat des zweiten Theils, $(3.10)^2 = 900$, hinzuzufügen. Ueberhaupt: fährt man fort, jeden Theil der Zahl, dessen

Quadrat berechnet ist, als ersten, a, und den nächstniedrigeren Theil als zweiten, b, anzunehmen; so hat man zu dem fertigen Quadrate des ersten, a^2, immer aufs Neue das doppelte Product aus beiden, 2ab, und das Quadrat des zweiten, b^2, hinzuzusetzen. Auch diese späteren Producte lassen sich in derselben Art wie die zuerst gebildeten berechnen, mit dem einzigen Unterschiede, daß jetzt der erste Theil allemal eine mehrziffrige Zahl ist, welche als Inbegriff von Einheiten ihrer niedrigsten Ziffer angesehen werden muß. Man nimmt demnach sowohl diesen, wie die nachfolgende Ziffer vorläufig ohne Berücksichtigung ihres Ranges (als a und b) in Rechnung und bestimmt die Einheiten der aus ihnen gebildeten Producte ($2ab + b^2$) durch getrennte Multiplication der Einheiten ihrer Factoren. Es bedarf aber dazu gar keiner besonderen Rechnung mehr, wenn man erwägt, daß allemal der zweite Theil, b, Einheiten der nächstniedrigeren Ordnung, wie der vorhergehende, a, oder wie es vorhin bezeichnet wurde, daß jener Einheiten der $(n-1)$ten, wenn dieser Einheiten der nten Ordnung zählt. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich schon erwiesen, daß von den drei, auf die angezeigte Art berechneten Producten a^2 und 2ab und b^2 jedes nachfolgende den nächstniedrigeren Rang bekommt wie das vorhergehende. Dasselbe Gesetz gilt also von der ganzen Reihe nach einander zu entwickelnder Producte. Den Beschluß macht das Quadrat der Einer, dessen niedrigste Ziffer selbst wieder die Einer bezeichnet. Jedes folgende Product erhält daher am Ende eine Null weniger als das vorhergehende. Um aber auch das Schreiben dieser Nullen zu ersparen, pflegt man die Endziffer jedes folgenden Products nur eine Stelle weiter zur Rechten hinauszurücken, wie beim vorhergehenden. Zuletzt sind alle so gewonnenen Producte in der ihnen angewiesenen Stellung durch Addition zu vereinigen: die Summe ist das gesuchte Quadrat der gegebenen Zahl.

Für das obige Beispiel gestaltet sich die Rechnung so:

$$\begin{array}{l} \;a \qquad\quad\; b \qquad\quad\; c \qquad\; d \\ 7436^2 = (7.1000 + 4.100 + 3.10 + 6)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
= & 49000000 \\
 & 5600000 \\
 & 160000 \\
 & 444000 \\
 & 900 \\
 & 89160 \\
 & 36 \\
\hline
= & 55294096
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
= & \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 49 \ldots\ldots a^2 \\ 56 \ldots 2ab \\ 16 \ldots b^2 \end{array}\right\} A^2 \\ 444 \ldots 2Ac \\ 9 \ldots c^2 \end{array}\right\} \alpha^2 \\
 & \quad 8916 \ldots 2\alpha d \\
 & \quad 36 \ldots d^2 \\
\hline
= & 55294096
\end{array}$$

(Die nebenstehende, übrigens für sich verständliche Buchstabenbezeichnung setzt $A = 74$ und $\alpha = 743$.)

B. — Wie hat man sich bei dieser Rechnung zu verhalten, wenn in der Wurzel Nullen vorkommen?

Welche Veränderungen müßte das ganze Verfahren erleiben, wenn man die Berechnung des Quadrats einer mehrziffrigen Zahl mit dem Quadrate der niedrigsten Ziffer anfangen und allmählig zu höheren Theilen aufsteigen wollte?

2. Die beschriebene Methode, mehrziffrige, dekadisch gebildete ganze Zahlen zum Quadrat zu erheben, giebt noch zu der Bemerkung Veranlassung, daß die Quadrate der einzelnen Ziffern in den auf einander folgenden Stellen gerader (doppelt so hoher) Ordnung, (zu welchen hier auch die Stelle der Einer oder der Einheiten vom Range 0 zu rechnen ist), die doppelten Producte aus jeder Ziffer in den Inbegriff der vorhergehenden dagegen in den dazwischen fallenden Stellen ungerader Ordnung endigen. Das Quadrat einer solchen Zahl hat also mindestens eben so viele Stellen paarer Ordnung, als die Wurzel Ziffern, und man darf hinzufügen: **auch nicht mehr**. Denn jede mehrziffrige Zahl, auch wenn alle Theile bis zum höchsten möglichst groß angenommen werden, ist doch stets kleiner als eine Einheit der nächsthöheren Ordnung. Ihr Quadrat muß also kleiner bleiben als das Quadrat dieser Einheit. Letzteres, selbst wieder eine höhere Einheit, und zwar von doppelt so hohem Range als die Wurzel, ist als solche die kleinste Zahl dieses Ranges. Das Quadrat der gegebenen Zahl, wie jede andere, welche

kleiner bleiben soll, kann also nicht in ihren Rang hineinreichen. Gerade dieser ist aber der nächste paare Rang, bis zu welchem jenes Quadrat aufsteigen müsste, wenn es mehr Stellen gerader Ordnung enthalten sollte, als die Wurzel Ziffern hat.

Der vorstehenden Schlussfolge ist das obige oder ein anderes Beispiel unterzulegen.

3. Aus dem vorhin beschriebenen Verfahren, mehrziffrige ganze Zahlen zum Quadrat zu erheben, ergiebt sich leicht die allgemeinere Regel, dekadisch gebildete Zahlen im weitesten Sinne des Worts, also mit Einschluss der Decimalbrüche (§. 33), zum Quadrat zu erheben. Jede Zahl dieser Art kann als ein einziger Bruch angesehen werden, dessen Zähler die gegebene Zahl ohne das Komma, dessen Nenner der Nenner ihrer niedrigsten Ziffer ist (§. 33. 2). Um das Quadrat dieses Bruches zu bilden, hat man das Quadrat sowohl des Zählers als des Nenners zu berechnen und jenem dieses als Nenner wieder unterzusetzen. Wie das Quadrat des Zählers, einer ganzen Zahl, gefunden wird, ist bekannt. Das Quadrat des Nenners, einer höheren dekadischen Einheit, die mit so vielen Nullen geschrieben wird, als die Wurzel Bruchstellen hat, ist selbst wieder eine höhere Einheit, und zwar von doppelt so hohem Range oder mit zweimal so vielen Nullen geschrieben. Eben so viele Stellen sind also im Quadrate des Zählers vom Ende mit dem Komma abzuschneiden, um das gesuchte Quadrat wieder in der abgekürzten Form der Wurzel zu erhalten. Daher die Regel: um eine dekadisch gebildete, mit dem Komma geschriebene Zahl zum Quadrat zu erheben, berechne man ihr Quadrat zuerst, ohne das Komma zu berücksichtigen, wie das einer ganzen Zahl, und schneide in demselben vom Ende doppelt so viele Decimalstellen ab, als die Wurzel enthielt, — etwa fehlende durch Nullen ergänzend; z. B.

$$74{,}36^2 = \left(\frac{7436}{100}\right)^2 = \frac{7436^2}{100^2} = \frac{55294096}{10000} = 5529{,}4096;$$

$$0{,}12^2 = 0{,}0144.$$

B.

Die Stelle des Kommas im Quadrat kann auch gleich während der Rechnung bestimmt werden, indem dasselbe hinter das Quadrat der Einer und demgemäß auch in der Summe zu setzen ist. B.

4. Nicht selten wird von dem Quadrate einer mehrziffrigen (dekadischen) Zahl nur der höchste Theil bis zu den Einheiten eines gewissen Ranges herab verlangt, und es ist practisch wichtig, ein Verfahren zu ermitteln, welches diesen Theil mit Ausschluß aller überflüssigen Rechnungen liefert. Besonders zweckdienlich erscheint dasselbe, wenn schon die gegebene Wurzel eine bloß genäherte, zumal in einer tieferen Bruchstelle abgebrochene Zahl ist, um das Quadrat derselben nur so weit zu berechnen, als dessen Richtigkeit verbürgt werden kann. Auf diese Voraussetzung kann um so mehr die Darstellung des gewünschten Verfahrens, welches man verkürztes Quadriren zu nennen pflegt, beschränkt werden, da sich aus den für diesen Fall getroffenen Bestimmungen leicht die Abänderungen entnehmen lassen, welche nöthig werden, wenn das geforderte Quadrat in irgend einer höheren Stelle willkürlich abgebrochen werden soll.

Gesetzt also, die unvollständig ausgedrückte Wurzel enthalte n Ziffern, so wird das nach der vorigen Regel oder durch gemeine Multiplication vollständig berechnete Quadrat derselben, wenn das Quadrat der höchsten Ziffer für sich eine zweiziffrige Zahl oder durch den Zuwachs aus späteren Producten dazu erhoben wird, $2n$, sonst nur $2n - 1$ Ziffern bekommen. Die letzten $n - 1$ Ziffern desselben sind zuverlässig unbrauchbar und würden durch die verkürzte Multiplication der Wurzel mit sich selbst (nach §. 40. 3, b) gleich ausgeschlossen werden; auch die niedrigste Ziffer des beibehaltenen Theils bleibt noch mit einer namhaften Unsicherheit behaftet. Es fragt sich nun, wie auch bei Anwendung der vorigen Methode des Quadrirens die Mitberechnung jener unbrauchbaren Ziffern auf eine leichte und zweckmäßige Art vermieden werden könne.

Hat die Wurzel eine unpaare Menge von Ziffern, $n = 2r + 1$, so sind alle Producte bis zum Quadrate der mittelsten, $(r + 1)$ten, dieses eingeschlossen, vollständig zu berechnen. Es würden nun noch doppelt so viele Producte hinzukommen, als Ziffern übrig sind, $2r$, da noch r Ziffern bleiben, d. i. eins weniger, als die Wurzel überhaupt Ziffern hat, $2r = n - 1$. Jedes folgende Product müßte eine Stelle tiefer als das vorhergehende, mithin das letzte noch eben so viele Stellen tiefer heruntergerückt werden, als im Ganzen Producte folgen, $2r$ oder $n - 1$. Diejenigen Theile aller dieser Producte, welche unter den Rang des Quadrates der mittelsten, $(r + 1)$ten Ziffer herabsinken, können folglich von der Berechnung ausgeschlossen werden. Von dem doppelten Producte der nächstniedrigeren Ziffer in den ganzen vorhergehenden Theil der Wurzel kann daher die Endziffer wegfallen. Das Quadrat dieser Ziffer, und noch mehr die Quadrate aller niedrigeren Ziffern der Wurzel können aus leicht begreiflichen Gründen ganz übergangen werden. Bei der Berechnung jedes folgenden doppelten Productes aus dem ersten in den neu hinzukommenden zweiten Theil würde der erste, mithin auch sein Doppeltes, um eine Ziffer am Ende zugenommen haben, das Product selbst aber zwei Stellen tiefer heruntergerückt werden müssen.

Man behält daher den bis zur mittelsten Ziffer herabreichenden Theil der Wurzel als ersten bei, verdoppelt ihn (wobei man der größeren Genauigkeit wegen in die Endziffer die vom Doppelten der nächstniedrigeren Ziffer in ihren Rang übergehenden Einheiten mit aufnimmt) und multiplicirt dieses Doppelte der Reihe nach mit jeder nachfolgenden Ziffer der Wurzel, das erste Product um eine, und jedes folgende um eine Stelle mehr verkürzend. Alle so verkürzten Producte werden mit ihrer Endziffer in den Rang gesetzt, bei welchem die Rechnung abgebrochen wurde, und in dieser Stellung mit allen vorhergehenden durch Addition vereinigt.

Die beschriebene Rechnung zeigt folgendes Beispiel:

$80,36735^2 \ldots =$	
$6400,$	
4809	$2a = 2.8036[7]$
9636	$= 16073$
36	$[\times\ 537]$*)
11251	$(= 7.1607[3])$
482	$(= 3.160[73])$
80	$(= 5.16[073])$
$= 6458,910[9]\ldots$	

Die Stelle des Kommas im Quadrat ist hier, wie es überhaupt am bequemsten sein dürfte, gleich während der Rechnung bestimmt. Wie man dieselbe erst nach übrigens vollendeter Berechnung des abgekürzten Quadrats zu finden hätte, bedarf keiner Anweisung.

Die Regel ist für die beiden Fälle anzugeben, wenn entweder das abgekürzte Quadrat noch unter den Rang der Einer herabgeht, oder wenn es denselben nicht erreicht.

Wird die letzte Ziffer, hier 9, als zu unsicher weggeworfen, so ist das abgekürzte Quadrat jedenfalls zu klein. Legt man ihr aber erst noch das bei der letzten verkürzten Multiplication in Rechnung gezogene Stück des doppelten ersten Theils, hier 16, und so viele Einheiten zu, als verkürzte Producte aufgenommen sind, hier 3, um die Zehner der Summe, hier von $9 + 16 + 3$ oder von 28, also 2, auf die nächsthöhere Ziffer, hier 0, zu übertragen; so erhält diese einen so großen Werth, wie sie ihn bei weiter fortgesetzter Berechnung auch im ungünstigsten Falle nicht bekommen könnte.

Das Quadrat von $80,36735\ldots$ liegt hiernach zwischen $6458,910\ldots$ und $6458,912\ldots$

Worauf gründet sich diese Bestimmung?

Hat die gegebene unvollständige Wurzel eine paare Menge

*) Jede Ziffer der unteren Reihe ist unter diejenige der oberen Reihe gesetzt, bei welcher die verkürzte Multiplication mit ihr anhebt.

von Ziffern, $n = 2r$; so würde man eine Stelle weniger in Rechnung nehmen, als zur möglichst genäherten Bestimmung des Quadrats erforderlich sind, wenn man die Abkürzung bei dem Quadrate derjenigen Ziffer beginnen wollte, welche die erste Hälfte beschließt, der rten vom Anfange (da nun noch $2r = n$ niedrigere Stellen bei vollständiger Berechnung erfolgen würden) — eine Stelle mehr dagegen, wenn man die Abkürzung erst nach dem Quadrate der unmittelbar folgenden Ziffer, der rten vom Ende, anheben ließe, (weil dann nur noch $2r - 2 = n - 2$ niedrigere Stellen sich ausfüllen würden). Man berechnet deßhalb auch das zwischen beide Quadrate fallende Product noch vollständig, nimmt vom Quadrate der niedrigeren Ziffer nur noch die Zehner auf, zieht dann die Ziffer selbst mit zum ersten Theile der Wurzel, verdoppelt denselben, und multiplicirt die entstandene Zahl der Reihe nach mit jeder niedrigeren Ziffer der Wurzel, das erste Product um zwei, und jedes folgende um eine Stelle mehr verkürzend. Alle übrigen Bestimmungen bleiben, wie im vorigen Falle.

Die beschriebene Rechnung ist aus nachstehendem Beispiele zu ersehen:

$$
\begin{array}{rl}
29,154362^2\,.\,. = & \\
4 & \\
36 & \\
87 & \\
581 & \\
29125 & 2a = 2\,.\,29154 \\
23320 & = 583[08] \\
1\,[6] & [\times 263] \\
1749 & (= 3\,.\,583[08]) \\
349 & (= 6\,.\,58[308]) \\
11 & (= 2\,.\,5[8308]) \\
\hline
= 849,9768[0]\,.\,. &
\end{array}
$$

Beispiele. — Um an Beispielen zu zeigen, wie weit man sich auf ein durch verkürzte Rechnung gebildetes Quadrat verlassen könne, nehme man als Wurzel den einen oder anderen Bruch, der sich nicht vollständig in einen Decimalbruch verwandeln läßt, z. B. $^5/_6$, entwickele seinen

Werth näherungsweise auch in dieser Form bis zu den Einheiten eines gewissen Ranges herab, z. B. $\frac{5}{6} = 0,833333\ldots$, berechne sowohl das Quadrat des gemeinen Bruchs als des Decimalbruchs und verwandle nun auch jenes in einen Decimalbruch, um beide Resultate mit einander zu vergleichen.

Anmerk. Um den Grad der Unsicherheit zu ermitteln, welche dem Quadrate einer unvollständigen Zahl, abgesehen von der Unsicherheit, welche aus der Rechnungsmethode entspringt, schon deßhalb anklebt, weil der Betrag der niedrigeren unterdrückten Ziffern nicht bekannt ist, nehme man an, die gegebene Wurzel z gehe bis zu einem Range herunter, dessen Einheit allgemein durch $\frac{1}{100\,..\,0}$ bezeichnet werden möge, und sei bis in diesen Rang genau, so daß ihrer niedrigsten Ziffer keine Einheit zugelegt werden dürfe, ohne die Zahl zu groß zu machen. Alsdann ist das Quadrat der gegebenen Zahl, z^2, freilich zu klein. Der Fehler kann aber nicht so viel betragen, als jenes Quadrat von dem Quadrate der um eine Einheit ihrer niedrigsten Ordnung vergrößerten Wurzel, d. i. $\left(z + \frac{1}{100\,..\,0}\right)^2$ übertroffen wird. Nun ist aber $\left(z + \frac{1}{100\,..\,0}\right)^2 - z^2 = z^2 + \frac{2z}{100\,..\,0} + \frac{1}{100\,..\,0^2} - z^2 = \frac{2z}{100\,..\,0} + \frac{1}{100\,..\,0^2}$. Und handelt es sich, wie gewöhnlich bei der Bestimmung der Fehlergrenzen, nur um die Angabe der höchsten Einheiten des Unterschiedes zwischen beiden Grenzwerthen; so darf man den zweiten Theil der bezeichneten Differenz ganz unberücksichtigt lassen und braucht auch von dem ersten $\frac{2z}{100\,..\,0}$ nur die höchste Ziffer zu berechnen.

Diese Bestimmung ist auf die obigen oder andere willkürlich gewählte Beispiele anzuwenden.

§. 61.

Ausziehung der Quadratwurzel. — Möglichkeit ihrer Ausführung. — Imaginäre; Irrational-Ausdrücke. Incommensurabilität. — Allgemeinere Bestimmung der Aufgabe der Wurzelausziehung.

1. Von der Erhebung einer Zahl zum Quadrat ist die Ausziehung der Wurzel zweiten Grades oder der Quadrat-

wurzel aus einer Zahl die umgekehrte Aufgabe. Jene verlangt die Bildung eines Productes durch Multiplication der gegebenen Zahl mit sich selbst, diese die Zerlegung einer Zahl in zwei gleiche Factoren oder die Bestimmung einer Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt die gegebene hervorbringt. Um diese Aufgabe der obigen Vorschrift (§. 58. 2) gemäß anzudeuten, würde man das Zeichen $\sqrt[2]{}$ vor die Zahl zu setzen haben, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll. Man pflegt aber aus demselben die Angabe des Grades (2) wegzulassen, und so das (an sich noch unbestimmte) Zeichen $\sqrt{}$ zur Andeutung des einfachsten und gewöhnlichsten Falles der Wurzelausziehung zu gebrauchen. Hiernach ist z. B. $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$, weil $4^2 = 4 \,.\, 4 = 16$ ist. Allgemein: statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man $\sqrt{a}$ und versteht darunter eine Zahl x, deren Quadrat, x^2, $= a$ ist. Die gefundene Zahl oder die Quadratwurzel nennt man auch schlechthin die Wurzel der gegebenen, im vorigen Beispiele 4 die Wurzel von 16.

2. Ihrem Begriffe gemäß hebt die Ausziehung der Quadratwurzel eine vorangegangene Erhebung zum Quadrat, und umgekehrt diese jene wieder auf; — kürzer: beide Operationen, (in beliebiger Aufeinanderfolge) an derselben Zahl verrichtet, heben sich gegenseitig auf.

$$\sqrt{(a^2)} = (\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a. \qquad \text{B.}$$

3. Die Ausziehung der Quadratwurzel stimmt mit der Division in sofern überein, als beide die Auflösung eines gegebenen Productes verlangen; aber die Division nimmt dazu auch den einen Factor desselben als bekannt an, um den anderen wiederzufinden, während die Wurzelausziehung aus der Bedingung, daß beide Factoren einander gleich sein sollen, die Größe des einzelnen zu bestimmen fordert. Die Division entnimmt daher dem gegebenen Factor bestimmte Vorschriften für die Zerlegung des Products; die Ausziehung der Quadratwurzel ist lediglich auf den Weg der Versuche angewiesen. Bevor man aber weiter darauf eingeht, diese zu regeln, ist erst die Frage zu beantworten, ob überhaupt aus jeder

Zahl die Quadratwurzel wirklich gezogen, oder ob jede Zahl als Product aus zwei gleichen Factoren wirklich angesehen werden könne.

4. Zuerst ist klar, daß nur aus positiven Zahlen die Quadratwurzel gezogen werden kann; denn jedes Quadrat ist positiv, die Wurzel selbst mag positiv oder negativ sein. Die Forderung, aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen, ist ungereimt und unstatthaft, und Ausdrücke, welche dieses verlangen, wie $\sqrt{-a}$, nennt man deßhalb imaginär.

Wo sie als Resultate einer Rechnung sich ergeben, deuten sie darauf hin, daß schon in den ihr untergelegten Voraussetzungen etwas Widersinniges, rein Unmögliches, ein Widerspruch gegen die Gesetze der Zahlenverknüpfung enthalten sei. Wie aber negative Zahlen, selbst wenn sie als Rechnungsresultate vermöge der Natur der Aufgabe oder der darzustellenden Größen gar keine vernünftige Auslegung gestatten, doch ihren Werth als rein arithmetische Zeichen behalten, und um die Allgemeinheit arithmetischer Bestimmungen nicht einzubüßen, in jedem Falle unbedingt zugelassen werden müssen: so haben auch imaginäre Ausdrücke, abgesehn von ihrer Nothwendigkeit, um das Widersinnige gewisser Voraussetzungen klar herauszustellen, für die formale Arithmetik noch manchen anderweitigen Nutzen, und dürfen keineswegs deßhalb, weil sie etwas rein Unmögliches verlangen, von allen weiteren arithmetischen Verbindungen ausgeschlossen werden. Vielmehr leisten sie den Untersuchungen der höheren Arithmetik die wesentlichsten Dienste. Manche Rechnungen würden ohne ihre Hülfe gar keines zusammengezogenen Ausdrucks fähig sein, und nicht selten treten imaginäre Ausdrücke nur während der Entwickelung oder als Theile des Gesuchten hervor, bloß weil jene und dieses sich einer künstlichen Form fügen mußten, werden aber am Ende nach unbedenklichen Schlüssen auf die eine oder andere Art wieder aufgehoben, so daß das Resultat dennoch eine mögliche und reelle Zahl wird. Man rechnet daher mit imaginären Ausdrücken, wo sie vorkommen, nach denselben Regeln, wie mit wirklichen (reellen) Zahlen, freilich nur andeutungsweise und stets unter dem Vorbehalte: »wenn das Verlangte sich als Zahl darstellen ließe.«

Diese Bemerkung über das Rechnen mit imaginären Ausdrücken mag hier genügen, da die Elementar-Arithmetik kaum in den Fall kommt, von demselben ernstlich Gebrauch zu machen. Es versteht sich danach von selbst, daß imaginäre Ausdrücke mit reellen Zahlen auf keine Art wahrhaft vereinigt werden können, sondern die Andeutung jeder Verbindung unter ihnen bloß hypothetische Form bleibt.

Um wenigstens noch an einigen Beispielen zu zeigen, wie das Rechnen mit imaginären Ausdrücken zu reellen Resultaten führen könne, setzen wir folgende Formeln her:

$$c + b\sqrt{-a} - b\sqrt{-a} = c;$$
$$\frac{b\sqrt{-a}}{c\sqrt{-a}} = \frac{b}{c};$$
$$(\sqrt{-a})^2 = -a.$$

5. Was zweitens die Größe der Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, oder den Werth derselben an sich betrifft, so leidet auch von dieser Seite, wie sich bei näherer Prüfung ergiebt, die Möglichkeit der Operation bedeutende Einschränkungen. Aus einem Bruche die Wurzel zu ziehen, wird man genöthigt sein, sie aus dem Zähler und Nenner für sich zu berechnen (S. §. 59. 3). Man braucht daher nur zu untersuchen, ob aus jeder beliebigen ganzen Zahl die Quadratwurzel wirklich gezogen werden könne.

Berechnet man aber die Quadrate auf einander folgender ganzer Zahlen, z. B. von 1, 2, 3, 4, 5, 6 ic.
die Quadrate 1, 4, 9, 16, 25, 36 ic.,
so findet man je zwei benachbarte desto weiter von einander abstehend, je größer ihre Wurzeln sind. Denn unter n eine beliebige ganze Zahl verstanden, ist die nächst größere $n + 1$, und deren Quadrat, $n^2 + 2n + 1$, von dem Quadrate der vorhergehenden, n^2, um $2n + 1$ Einheiten verschieden — mithin um so mehr, je größer n ist. Zwischen die Quadrate der beiden benachbarten ganzen Zahlen n und $n + 1$ fallen also $2n$ verschiedene ganze Zahlen, welche nicht Quadrate anderer ganzer Zahlen sein können. Ihre Quadratwurzeln müssten demnach ganze Zahlen mit angehängten echten Brüchen, oder auf ganze Zahlen nicht zurückführbare unechte Brüche, größer als n und kleiner als $n + 1$, sein. Die Quadrate solcher Brüche sind aber selbst wieder Brüche, die nicht auf ganze Zahlen zurückgebracht werden können (§. 59. 3).

Es giebt also eine große Menge ganzer Zahlen, deren Quadratwurzeln weder ganze noch gebrochene, folglich überhaupt keine Zahlen sein können, — und es giebt deren im Verhältniß zu solchen, welche wirklich Quadrate anderer sind, ungleich mehr, und verhältnißmäßig immer mehr, je weiter man die Reihe zur Vergleichung gezogener Zahlen fortsetzt.

Die letzte Behauptung ist durch Bestimmung der Mengen vollständiger Quadratzahlen und solcher, die es nicht sind, unter den Zahlen von 1 bis 10, bis 100, 1000 ꝛc. zu rechtfertigen, auch die vorige Schlußfolge für eine bestimmte Reihe zwischen zwei benachbarten Quadraten (z. B. 9 und 16, 25 und 36 od. a.) liegender Zahlen zu wiederholen.

Wenn aber schon unter den ganzen Zahlen, so giebt es auch unter den Brüchen, folglich überhaupt unter allen Zahlen nur sehr wenige, denen im eigentlichen Verstande eine Quadratwurzel zukommt.

Die Forderung, aus Zahlen die Quadratwurzel zu ziehen, welche (obgleich positiv) gar nicht als Quadrate anderer Zahlen angesehen werden können, ist besonders deßhalb merkwürdig, weil sie das erste Beispiel arithmetischer Ausdrücke giebt, welche Rechnungen fordern, die, obgleich an sich möglich und bestimmt, doch mit gewissen Zahlen, streng genommen, gar nicht ausgeführt werden können, weil diese so, wie es vorauszusetzen wäre, gar nicht aus anderen Zahlen entsprungen sein können. Man nennt sie Irrational-Ausdrücke.*)

6. Die Größe, welche ein Irrational-Ausdruck bezeichnen soll, kann also vollständig durch keine Zahl dargestellt werden. Sie ist weder ein genaues Vielfaches der gewählten Einheit selbst, noch irgend eines aliquoten Theils derselben; sie hat kein angebbares Verhältniß (ratio) zu dieser Einheit, — hört aber darum doch nicht auf, durch die Bedingung, welcher ihr Werth genügen müßte, wenn er durch eine Zahl darstellbar wäre, unzweifelhaft bestimmt zu sein. Denn die Angabe einer festen, nur auf eine Art zu deu-

*) Nicht Irrationalzahlen; denn das Eigenthümliche derselben besteht gerade darin, daß, was sie verlangen oder bestimmen sollen, nicht durch Zahlen angegeben werden kann.

tenden Beziehung, in welcher eine Größe zu gegebenen gleicher Art stehen soll, führt nothwendig auch zu einer bestimmten Vorstellung der abhängigen Größe — und wird der Ausdruck, welcher jener Beziehung zufolge die Berechnung ihres Werthes vorschreibt, durch Einführung gewisser Zahlen, welche die gegebenen Größen im Verhältniß zu einer angenommenen Einheit ausdrücken, irrational; so wird dadurch nicht die Bestimmtheit der gesuchten Größe aufgehoben, sondern nur die Unmögligkeit bewiesen, sie im Verhältniß zu der nämlichen Einheit durch eine Zahl erschöpfend darzustellen. Irrational-Ausdrücken können daher nur besondere Werthe **stetiger** Größen entsprechen. Solche Beziehungen aber zwischen stetigen Größen, welche die arithmetische Bestimmung der einen von Ausdrücken abhängig machen, die für gewisse Zahlwerthe der gegebenen Größen irrational werden, sind nicht bloß denkbar, sondern werden in allen Theilen der Mathematik, die den Zusammenhang stetiger Größen untersuchen, als wirklich bestehend nachgewiesen.*)

Daraus geht die merkwürdige Thatsache hervor, das **eine stetige Größe auch solcher**, — man darf hinzufügen, **unend-**

---

*) Die Geometrie z. B. weist solche Beziehungen von den einfachsten räumlichen Größen, den geraden Linien, in mehr als einem Falle nach, — so unter anderen in dem Satze, daß in jedem rechtwinkligen Dreiecke das von dem Scheitel des rechten Winkels auf die gegenüberstehende Seite herabgelassene Loth, c, die mittlere geometrische Proportionale zwischen den dadurch gebildeten Abschnitten dieser Seite, a und b, also $a : c = c : b$, folglich $c = \sqrt{(ab)}$ ist, — ferner auch in dem **pythagoräischen** Lehrsatze, welcher den Zusammenhang unter den drei Seiten jedes rechtwinkligen Dreiecks, wenn man die Längen derselben, nach gemeinschaftlichem Maße gemessen, mit a, b und c, und zwar mit c die Länge der größten (dem rechten Winkel gegenüberliegenden) Seite bezeichnet, durch die Formel $c^2 = a^2 + b^2$ ausdrückt, woraus $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ folgt.

Im einen wie im anderen Falle dürfen für a und b Linien von beliebiger Länge gesetzt werden. Eine leichte Construction giebt jederzeit den entsprechenden Werth der dritten c genau begrenzt an, auch wenn derselbe arithmetisch, was meistens geschehen würde, nur durch einen Irrational-Ausdruck zu bezeichnen, mithin wenigstens keiner vollendeten Bestimmung durch eine Zahl fähig wäre.

lich vieler verschiedener Werthe fähig ist, welche durch ein gegebenes Maß, also eine gleichartige Größe, und zwar weder durch das ganze noch durch irgend einen aliquoten Theil desselben, erschöpfend ausgemessen werden können. Gleichartige Größen, welche in dieser Beziehung zu einander stehen — denn die Beziehung ist natürlich gegenseitig — nennt man incommensurabel. Der Irrationalität arithmetischer Größenbestimmungen, oder der Unmöglichkeit, die gesuchten Größen auf ein bestimmtes Verhältniß zu der nämlichen Einheit zurückzuführen, wie die gegebenen, entspricht daher die Incommensurabilität dieser Größen selbst.

7. Es könnte scheinen, als verlöre die Größenbestimmung durch den vermittelnden Begriff der Zahl in allen denjenigen Fällen, wo sie auf Irrational-Ausdrücke führt, ihre Kraft und ihren Werth. Allein auch dann noch leistet die Arithmetik Alles, was man ihrer Natur nach von ihr verlangen kann. Indem sie nämlich in ihrer klaren und bestimmten Sprache die Art und Weise ausdrückt, wie das Gesuchte vom Gegebenen abhängt, oder die Bedingungen aufstellt, welchen der Werth des Gesuchten genügen müßte, sofern er überall durch eine Zahl darstellbar wäre, giebt sie das Mittel an, von jeder Zahl, die man als genäherten Werth des Gesuchten annehmen möchte, mit Sicherheit zu entscheiden, ob sie zu groß oder zu klein ist. Denn legt man diese Zahl der Rechnung, welche der Irrationalausdruck vorschreibt, versuchsweise zum Grunde, so muß das Resultat entweder größer oder kleiner ausfallen, als diejenige Zahl, welche eigentlich hätte gefunden werden sollen, und daraus darf man schließen, daß auch die angenommene Zahl entweder zu groß oder zu klein ist, je nachdem einer Vergrößerung oder Verringerung derselben eine gleichartige oder die entgegengesetzte Veränderung des Resultats entspricht. Auf diese Weise muß es möglich sein, zwei nur um eine Einheit ihrer niedrigsten Ordnung von einander verschiedene Zahlen zu finden, welche, die eine zu groß, die andere zu klein, die gesuchte Größe zwischen sich schließen, und diese Grenzen immer enger und enger zusammenzu-

ziehen, indem man beide Zahlen auf immer niedrigere Einheiten oder immer kleinere Bruchtheile der Einheit bestimmt.

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, kehren wir zu der Aufgabe zurück, welche zuerst den Begriff irrationaler Ausdrücke angeregt und die allgemeine Erörterung ihres Sinnes veranlaßt hat. Gesetzt also, es solle die Quadratwurzel aus **12** gezogen werden. — Die Zahl **12** ist weder das Quadrat einer ganzen, noch einer gebrochenen Zahl, folglich $\sqrt{12}$ ein Irrational-Ausdruck. Allein der Werth desselben muß zwischen **3** und **4** liegen, weil

$$3^2 \text{ oder } 9 < 12,$$
$$4^2 \text{ oder } 16 > 12 \text{ ist.}$$

Fernere Versuche, den Werth der $\sqrt{12}$ zwischen engere Grenzen einzuschließen, sind also auf die Zahlen zwischen **3** und **4** beschränkt. Um dabei planmäßig zu Werke zu gehen, und wie es bei ähnlichen Bestimmungen üblich und zweckmäßig ist, nur dekadisch gebildete Zahlen anzuwenden, hat man dem kleineren Grenzwerthe **3** erst **1**, dann **2**, **3**, **4** Zehntel ꝛc. überhaupt bei jedem folgenden Versuche ein Zehntel mehr zuzulegen, und die Quadrate dieser Zahlen (also von **3,1** und **3,2** u. s. w.) so lange zu berechnen, bis man zwei benachbarte findet, von welchen das eine noch kleiner, das andere dagegen schon größer als **12** ist. Zwischen den ihnen zugehörigen Wurzeln liegt alsdann der gesuchte Werth. Auf diese Weise findet man, daß $\sqrt{12}$ zwischen **3,4** und **3,5** liegen müsse. Denn es ist

$$3{,}4^2 = 11{,}56 < 12$$
$$\text{und} \quad 3{,}5^2 = 12{,}25 > 12.$$

Unter den Zahlen zwischen **3,4** und **3,5** sind nun zunächst wieder diejenigen zu prüfen, welche stufenweise je um ein Hundertstel ansteigen (**3,41**; **3,42** u. s. f.). Auch unter diesen muß es wieder zwei benachbarte geben, deren Quadrate die Zahl **12** zwischen sich fassen. Diese Zahlen sind, wie Versuche ergeben, **3,46** und **3,47**. Denn es ist

$$3{,}46^2 = 11{,}9716 < 12$$
$$\text{und} \quad 3{,}47^2 = 12{,}0409 > 12.$$

Durch weiter fortgesetzte Versuche erhält man für $\sqrt{12}$ die nur noch um ein Tausendstel verschiedenen Grenzwerthe 3,364 und 3,465. Denn es ist

$$3{,}464^2 = 11{,}999296 < 12$$
$$\text{und} \quad 3{,}465^2 = 12{,}006225 > 12.$$

Auf ähnliche Weise könnte man fortfahren, die Grenzen für den Werth der $\sqrt{12}$ einander bis auf ein Zehntausendstel, Hunderttausendstel, Milliontel ꝛc. zu näheren. Die Quadrate dieser Grenzwerthe müssen der Zahl 12 immer näher und näher rücken, wie schon aus der bisher geführten Rechnung erhellt. Denn das Quadrat des letzten kleineren Grenzwerthes 3,464 ist nur noch um 0,000704 kleiner als 12, während das Quadrat des ersten kleineren Grenzwerthes 3 noch um 3 ganze Einheiten zu klein war.

Aus diesen, wenn auch noch sehr unvollkommenen Versuchen ist doch schon so viel zu ersehen, daß es jederzeit möglich ist, dem Werthe irrationaler Quadratwurzeln auch durch Zahlen so nahe beizukommen, als man irgend will, oder die unvermeidliche Abweichung der Grenzen von dem wahren, durch Zahlen unerreichbaren Werthe unter jede willkürlich angenommene Grenze der Kleinheit herabzubringen.*) Dasselbe kann von allen anderen Arten irrationaler Ausdrücke, welche noch in der Folge vorkommen, bewiesen werden.

*) Schon bei der Aufgabe, gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln, (§. 39) zeigte sich in vielen Fällen die Unmöglichkeit, das Verlangte vollständig zu leisten. Gewisse Brüche konnten durch Decimalbrüche nur näherungsweise wiedergegeben werden, so daß diese bloß Grenzen festsetzten, welche um keine Einheit ihrer niedrigsten Ordnung von dem darzustellenden Werthe verschieden waren. Keiner anderen Bestimmung sind die Werthe irrationaler Quadratwurzeln und irrationaler Ausdrücke überhaupt fähig. Aber im ersten Falle rührt die Unmöglichkeit einer vollständigen Bestimmung nur von der Form her, in welcher sich der gesuchte Werth darstellen soll, während sie hier aus der Sache selbst hervorgeht. Was bei jener Aufgabe der unvollständige Decimalbruch bezeichnen soll, ist an sich sehr wohl durch Zahlen bestimmbar und durch den gegebenen gemeinen Bruch auch wirklich ausgedrückt, nur nicht in Form eines Decimalbruchs erschöpfend anzugeben. Die Werthe irrationaler Quadratwurzeln und irrationaler Ausdrücke überhaupt sind aber nicht bloß durch Decimalbrüche, sondern überall nicht durch Zahlen genau zu bestimmen.

Auch durch unmittelbare Messung stetiger Größen gewinnt man nur genäherte Bestimmungen, bei welchen die Möglichkeit eines Fehlers innerhalb gewisser Grenzen niemals ganz auszuschließen ist, und für die Zwecke der Praxis sind solche Bestimmungen auch vollkommen zureichend. Wo man sich also, wie bei Irrational-Ausdrücken, durch die Unmöglichkeit, das Verlangte völlig genau durch eine Zahl darzustellen, darauf beschränkt sieht, dasselbe zwischen Grenzen einzuschließen, läßt man die eine oder andere, gemeiniglich die kleinere, statt des wahren Werthes gelten, sobald man sich überzeugt hat, daß die Abweichung nicht mehr so viel betragen kann, als ohnehin für den Zweck der Größenbestimmung unerheblich ist. Mit diesem Vorbehalte setzt man auch die Werthe irrationaler Ausdrücke bestimmten Zahlen gleich, und dehnt den Begriff der Zahl und die Regeln der Zahlenverknüpfung auch auf sie aus. So setzt man z. B. $\sqrt{12} = 3{,}464..$, wenn man befugt ist, in diesem Werthe Alles, was weniger beträgt als ein Tausendstel der Einheit, zu vernachlässigen; denn 3,464.. ist um kein 0,001 mehr von dem wahren Werthe der $\sqrt{12}$ verschieden.

Dem Vorstehenden gemäß wird die Aufgabe der Wurzelausziehung, welche streng genommen nur in wenigen Fällen gelöst werden konnte, dergestalt abgeändert, daß ihr auch dann entsprochen werden kann, wenn sie auf Irrational-Ausdrücke führt. Aus einer Zahl die Quadratwurzel ziehen, soll nämlich heißen, unter allen Zahlen einer bestimmten Form (eines bestimmten Nenners, §. 22. 3) die größte zu finden, deren Quadrat von der gegebenen noch abgezogen werden kann. — Wenn die gegebene Zahl vollständiges Quadrat einer anderen ist, fällt diese Aufgabe mit der ursprünglichen zusammen.

§. 62.

Allgemeine Sätze über die Ausziehung der Quadratwurzel.

In dem zuletzt angegebenen Sinne ist die Ausziehung der Quadratwurzel aus positiven oder absoluten Zahlen immer möglich.

Nur in diesem Sinne soll die Aufgabe künftig verstanden und nur auf solche Zahlen angewandt werden. Dieses vorausgesetzt, ergeben sich aus den allgemeinen Sätzen über die Erhebung einer Zahl zum Quadrat durch bloße Umkehrung die nachstehenden.

1. Jede Quadratwurzel ist ihrer Beziehung oder dem Vorzeichen nach zweideutig: sie kann eben so gut positiv wie negativ sein.

$$\sqrt{16} = \mp\sqrt{16} = \mp 4;$$

allgemein $\sqrt{A} = \mp\sqrt{A} = \mp a;$

(denn $(\mp a)^2 = + a^2 = A$).

2. Die Quadratwurzel aus einem Product ist ein Product aus den Wurzeln seiner Factoren.

$$\sqrt{(a\,.\,b)} = \sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}.$$

Der Satz ist auch als Regel auszudrücken. — B. — $\sqrt{(25\,a^2 b^2)}$ u. a.

Auch in umgekehrter Beziehung kann dieser Satz ausgesprochen und zumal bei bloß symbolischen Rechnungen angewandt werden.

Wie?

3. Die Quadratwurzel aus einem Bruche ist ein Bruch, der die Wurzel des Zählers zum Zähler und die Wurzel des Nenners zum Nenner hat.

$$\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Gleichfalls als Regel und auch in der Kunstsprache der Division auszudrücken, wenn der Bruch als Quotient genommen wird. — B. —
$\sqrt{\frac{4\,c^2}{9\,m^2\,\imath^2}} = ?$ u. a.

Auch dieser Satz läßt sich in umgekehrter Beziehung aussprechen und anwenden.

Wie?

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Bruche verlangt hiernach eine zweimalige Ausführung der Operation. Diese Operation ist aber oft sehr umständlich, zumal wenn sie auf Irrational-Ausdrücke führt. Es verlohnt sich daher der Mühe, auf Mittel zu denken, um auch diese Aufgabe auf eine einzige Wurzelausziehung zurückzuführen. Und ein solches Mittel bietet sich leicht in der Fähigkeit des Bruchs an, ohne Aenderung seines Werthes mannigfaltige Formen anzunehmen. Man multiplicire Zähler und Nenner desselben entweder mit dem Zähler oder mit dem Nenner: so wird im ersten Falle der Zähler, im zweiten der Nenner des neuen Bruchs ein vollständiges Quadrat, dessen Wurzel ohne alle Rechnung vorherzubestimmen, nämlich der gegebene Zähler oder Nenner ist, und man hat beide Male nur die Wurzel aus dem Producte des Zählers und Nenners zu ziehen. Nämlich

$$\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{ab}\right)} = \frac{a}{\sqrt{(ab)}}$$

$$\text{oder} \quad = \sqrt{\left(\frac{ab}{b^2}\right)} = \frac{\sqrt{(ab)}}{b}.$$

Besonders von der zweiten Umformung der Aufgabe wird häufig Gebrauch gemacht. B.

Uebrigens verdient noch bemerkt zu werden, daß die Quadratwurzel aus einem echten Bruche ein größerer echter, so wie aus einem unechten ein kleinerer unechter Bruch werden muß.

Weßhalb?

4. Die Quadratwurzel eines aus Theilen zusammengesetzten Ausdrucks ist nur dann einer eigentlichen Entwickelung fähig, wenn sich derselbe unter die Form $a^2 + 2ab + b^2$ oder die aus ihr entspringende Form des Quadrats einer mehr als zweitheiligen Wurzel (§. 59. 4) bringen läßt. Es ist

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b.$$

Die Versuche, um die Wurzel eines mehrtheiligen Ausdrucks zu entdecken, ordnen sich dem Bildungsgesetze der Quadrate mehrtheiliger Wurzeln gemäß, am zweckmäßigsten wie folgt. Man sucht zuerst einen Theil aus, den man für das Quadrat eines einzelnen Theils der Wurzel zu halten Grund hat, und berechnet die Wurzel desselben. Diese wird, als erster Theil, **a**, zweimal genommen und mit dem Doppelten, **2a**, in ein anderes Glied des gegebenen Ausdrucks, welches die Form eines doppelten Productes aus zwei Theilen, **2ab**, hat, dividirt. Der Quotient, **b**, ist in der That ein neuer Theil der Wurzel, wenn außer dem Producte, **2ab**, auch das Quadrat desselben, b^2, in dem gegebenen Ausdrucke vorkommt. Bleibt von diesem nach Abzug der genannten Producte a^2 und $2ab$ und b^2 noch ein Rest, so nimmt man die Summe der bisher gefundenen Theile der Wurzel $(a+b)$ als ersten an, um mit dem Doppelten derselben oder zunächst ihres einen Theils in einen schicklich gewählten Theil des Restes zu dividiren. Mit dem Quotienten ist die ganze Summe zu multipliciren und außer dem Doppelten des gewonnenen Products auch das Quadrat des Quotienten von dem Reste abzuziehen, bevor man ihn als neuen Theil in die Wurzel aufnehmen darf. Dieselbe Rechnung ist mit der einzigen Veränderung, daß jedesmal die Summe aller bereits gefundenen Theile der Wurzel als deren erster Theil behandelt wird, so lange zu wiederholen, als durch den Abzug aller Glieder, aus welchen sich das Quadrat dieser Summe zusammensetzt, der gegebene Ausdruck noch nicht vollständig erschöpft wird. Geschieht dieses, so ist auch die Wurzel vollständig gefunden. Ueberzeugt man sich dagegen, daß durch den Zuwachs, welchen das Quadrat bei jeder ferneren Aufnahme eines neuen Theils in die Wurzel erhält, der vorige Rest niemals gedeckt werden kann; so muß man auf eine geschlossene Entwickelung der gesuchten Wurzel verzichten, und kann das abgebrochene Ergebniß der Rechnung nur unter Umständen als genäherten Werth derselben gelten lassen.

$$\sqrt{\left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{6mx}{n} + 9x^2\right)} = ?$$

$$\sqrt{(4m + 4r^2 - 16mr - 2r + 16m^2 + \tfrac{1}{4})} = ?$$

$$\sqrt{\left(\frac{1-10q+25q^2}{49}\right)} = ? \quad \sqrt{(1+x)} = ?$$

Welche zwei Werthe hat $\sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)}$?

§. 63.

Ausziehung der Quadratwurzel aus dekadisch gebildeten Zahlen.

Die allgemeinen Vorschriften, durch Versuche die Quadratwurzel mehrtheiliger Ausdrücke zu finden, zeichnen auch den Weg vor, welchen die Ausziehung der Quadratwurzel aus mehrziffrigen, dekadisch gebildeten Zahlen zu nehmen hat. Solche Zahlen zum Quadrat zu erheben, wurde (§. 60) aus den allgemeineren Regeln für das Quadriren mehrtheiliger Ausdrücke (§. 59. 4) ein eigenthümliches Verfahren abgeleitet. Umgekehrt müssen die Bestimmungen desselben auch das zweckmäßigste Verfahren der Wurzelausziehung ergeben.

1. Mag nun, um wieder mit dem einfachsten Falle zu beginnen, fürerst nur die Aufgabe gestellt werden, aus mehrziffrigen (dekadisch gebildeten) ganzen Zahlen die Wurzel zu ziehen. Die Wurzeln solcher Zahlen sind entweder selbst wieder ganze Zahlen oder irrational. Um daher die Aufgabe immer zulässig zu finden, setzen wir statt der ursprünglichen vorläufig folgende an die Stelle: unter allen ganzen Zahlen die größte zu finden, deren Quadrat von der gegebenen noch abgezogen werden kann. Man nennt diese Aufgabe die Ausziehung der Quadratwurzel in ganzen Zahlen.

a. Für alle Zahlen von 1 bis 100 wird sie bloß mit Hülfe des Einmaleins gelöst.

$$\sqrt{64} = ? \quad \sqrt{75} = ? \quad \sqrt{82} = ? \quad \text{rc.}$$

b. Steigt die Zahl über hundert, so wird die Wurzel (im angegebenen Sinne) eine mehrziffrige Zahl. Die Menge ihrer Ziffern stimmt (nach §. 60) überein mit der Menge der Stellen paarer Ordnung, welche die gegebene Zahl enthält (die Einerstelle mitgerechnet). Diese Ziffern sind eine nach der anderen zu suchen. Ihre Quadrate endigen in den Stellen paarer Ordnung. Um diese gleich auszuzeichnen, theilt man die gegebene Zahl, von den Einern anfangend, in Classen zu je zwei Ziffern; in die höchste kann auch nur eine Ziffer kommen; sie enthält das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel. Diese zu finden, versucht man, welche Ziffer die größte ist, deren Quadrat von der ersten Classe noch abgezogen werden kann. Sie ist unfehlbar die höchste der gesuchten Wurzel. Ihren Rang (den man auch vorläufig andeuten könnte) erhält sie im Verlaufe der Rechnung von selbst, indem ihr nach und nach so viele Ziffern nachgestellt werden, als Classen in der gegebenen Zahl auf die höchste folgen. Nun wird von der höchsten Classe das Quadrat der gefundenen Ziffer wirklich abgezogen und zum Reste die nächste Ziffer der folgenden Classe hinzugenommen. Dadurch erhält man dasjenige Stück des gesammten übrig bleibenden Theils, in welchem sich das doppelte Product aus der ersten in die nächstniedrigere Ziffer der Wurzel endigt. Dividirt man es also durch das Zweifache der gefundenen Ziffer, und bestimmt den Quotienten nur so weit er eine ganze Zahl wird; so kann diese, wofern sie nur mit einer Ziffer geschrieben wird, und übersteigt sie die Einer, statt ihrer die höchste Einerzahl 9 (¹) vorläufig als die gesuchte zweite Ziffer der Wurzel angesehen werden. Größer wenigstens kann die letztere nicht sein (²). Es fragt sich also nur, ob jene Zahl nicht etwa zu groß ist. Um dieses zu erfahren, multiplicirt man sie mit dem Doppelten der ersten Ziffer, zieht das Product von dem vorliegenden Theile der gegebenen Zahl ab, nimmt zum Reste die nächstniedrigere Ziffer eben dieser Zahl, d. i. die letzte ihrer zweiten Classe, und versucht, ob von dem so begrenzten Stücke des neuen Restes, in welchem das Quadrat der zweiten Ziffer enthalten sein muß, auch das Quadrat der für sie angenommenen Zahl noch wirklich abgezogen werden kann. Geht dieses an, so ist die angenommene Zahl die rechte; wo nicht, so hat man sie, um jedenfalls die größtmögliche zu finden, zunächst nur um Eins zu verringeren und die gefundene kleinere Zahl an die Stelle der vorigen zu setzen, um mit ihr die beschriebene Rechnung zu wiederholen. Zeigt auch diese sich noch zu groß, so nimmt man statt ihrer wieder die um Eins kleinere Zahl, und erneuert überhaupt die mit der ersten anzustellenden Versuche mit jeder nächstkleineren so lange, bis eine gefunden ist, welche den angegebenen Bedingungen genügt. Man findet so gewiß die größte Zahl, welche als zweite Ziffer der Wurzel neben der höchsten bestehen kann. Diese selbst kann aus leicht begreiflichen Gründen nachträglichen Berichtigungen nicht mehr ausgesetzt sein (³).

(¹) (²) (³) Weßhalb?

Enthält die gegebene Zahl überhaupt nur zwei Classen, so ist durch die vorgeschriebenen Versuche ihre Wurzel in ganzen Zahlen gefunden, und diese ist vollständig, und die gegebene eine vollständige Quadratzahl, wenn nach Abzug des Quadrats der zweiten Ziffer der Wurzel von ihr kein Rest bleibt.

Die beschriebene Rechnung ist aus folgendem Beispiele zu ersehen.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{3\,2|4\,9} \;=\; 5\,7 \\
\underline{(-)\,2\,5}\;[=5^2] \\
\quad 7\,4\;\;[74:(2.5)=74:10 \text{ giebt } 7] \\
\underline{(-)\,7\,0}\;\;[=2.5.7] \\
\quad 4\,9 \\
\underline{(-)\,4\,9}\;\;[=7^2] \\
\quad 0
\end{array}
$$

Beispiele, wo die gegebene Zahl keine vollständige Quadratzahl ist, — die zweite Ziffer beim ersten Versuche zu groß gefunden wird — wo dieselbe als 9 statt des sich unmittelbar ergebenden Quotienten 10 zu nehmen ist, — und wo sie 0 wird.

Enthält die gegebene Zahl mehr als zwei Classen, so kehrt die Rechnung, durch welche die zweite Ziffer der Wurzel gefunden wurde, mit geringen Abänderungen wieder, um auch die dritte, vierte und so jede folgende Ziffer derselben zu entdecken. Nachdem nämlich alle Producte, aus welchen sich das vollständige Quadrat des bisher gefundenen Theils der Wurzel zusammensetzt, bis zum Quadrate seiner letzten Ziffer am gehörigen Orte von der gegebenen Zahl abgezogen sind, darf jener als der erste, und die nächstniedrigere Ziffer als der gesuchte zweite Theil der Wurzel angesehen werden. An die Stelle der höchsten Ziffer bei dem Versuche, die zweite zu entdecken, tritt also jetzt als erster Theil der Wurzel eine aus allen bisher gefundenen Ziffern zusammengesetzte Zahl. Hiervon und von der gleichmäßigen Rangerniedrigung beider Theile abgesehen, bleibt alles Uebrige, wie bei der Aufgabe, nach der höchsten die zweite Ziffer der Wurzel zu bestimmen. So oft daher das vollständige Quadrat des ersten Theils der Wurzel von der gegebenen Zahl weggenommen ist, setzt man zum letzten Reste die nächste, noch unberührte Ziffer derselben (unpaaren Ranges, die höchste der noch unberührten Classe) und begrenzt dadurch dasjenige Stück des ganzen von ihr übrig bleibenden Theils, in welchem das doppelte Product des ersten und des nächstniedrigeren gesuchten Theils der Wurzel liegt. Dividirt man also die erhaltene Zahl durch das Doppelte des ersten Theils und bestimmt den Quotienten nur so weit er eine ganze Zahl wird; so bezeichnet derselbe die Grenze, über welche der gesuchte neue Theil nicht hinausgehen kann. Dieser kann selbst nicht die Einer überschreiten (¹). Ergäbe sich also auch ein größerer Quotient, so darf man doch statt seiner gleich 9 als Grenzwerth annehmen: und käme gar keine ganze Einheit in den Quotienten, so ist die nächste Ziffer der Wurzel 0, und die Bestimmung der folgenden Ziffer ohne Weiteres bei dem um zwei Stellen tiefer herabgehenden Reste von Neuem aufzunehmen, wenn überall noch spätere Classen in der gegebenen Zahl vorhanden sind. — Ob aber der genannte Quotient die gesuchte Ziffer der Wurzel wirklich sei, wird dadurch allein noch nicht entschieden, daß sich (was der Voraussetzung zufolge immer angeht) das doppelte Product aus ihm und dem ersten Theile von dem vorliegenden Stücke des gesammten Restes abziehen läßt; sondern, nachdem dieses geschehen, muß von demjenigen Theile des neuen Restes, welcher wieder eine Stelle tiefer (bis zur nächsten paaren Ranges, der zweiten in der angebrochenen Classe) herabgeht, auch sein Quadrat noch abgezogen werden können. Geht dieses an, so ist der angenommene Quotient die verlangte neue Ziffer der Wurzel; wo nicht, so muß derselbe nach und nach je um eine Einheit so lange verringert werden, bis er nicht bloß der ersten, sondern auch der zweiten Bedingung genügt. Auf die früher berechneten Ziffern höheren Ranges kann natürlich eine solche Verminderung niemals zurückwirken (²).

(¹) (²) Weßhalb.

Die letzte, auf diese Art gefundene Ziffer giebt die Einer der Wurzel an. Bleibt nach Abzug ihres Quadrats von der gegebenen Zahl kein Rest mehr, so ist diese ein genaues Quadrat der gefundenen Wurzel: so im nachfolgenden Beispiele:

$$
\begin{array}{llll}
 & & & \mathbf{a\ b\ c\ d} \\
 & \sqrt{55|29|40|96} & = & 7\,4\,3\,6 \\
\alpha^2 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. &
\begin{array}{l}
A^2 \left\{ \begin{array}{l} a^2 \ldots 49 \\ \qquad 62 \\ 2ab \ldots 56 \quad [=14.4] \\ \qquad 69 \\ b^2 \ldots 16 \end{array} \right. \\
\qquad 534 \\
2Ac \ldots 444 \quad [=148.3) \\
\qquad 900 \\
c^2 \ldots 9 \\
\end{array}
& &
\begin{array}{l}
\text{Nebenrechnungen:} \\
62:(2.7) = 62:14 = 4 + \text{ic.} \\
\qquad (=b) \\
\\
\\
534:(2.74) = 534:148 = 3 + \text{ic.} \\
\qquad (=c) \\
\\
\\
\end{array} \\
 & \qquad 8919 & & 8919:(2.743) = 8916:1486 = 6 + \text{ic.} \\
2\alpha d \ldots & \qquad 8916 \quad [=1486.6] & & (=d) \\
 & \qquad 36 & & \\
d^2 \ldots & \qquad 36 & & \\
 & \qquad 0 & &
\end{array}
$$

(In der nebenstehenden Buchstabenbezeichnung ist 74 = A, und 743 = α angenommen. — Vergl. S. 264.)

Beispiele, in welchen die Rechnung nicht aufgeht, — niedrigere Ziffern der Wurzel erst nach einem oder mehren Fehlversuchen richtig bestimmt werden, — die eine oder andere derselben 0 wird ic.

Merkmale, an welchen gleich ohne alle Rechnung zu erkennen ist, daß eine vielziffrige ganze Zahl keine vollständige Quadratzahl sein kann. (Man vergleiche die Endziffern der Quadrate der Einerzahlen.)

c. Das bisher beschriebene Verfahren läßt sich in einigen Stücken noch bequemer einrichten. Nachdem nämlich das Quadrat der höchsten Ziffer und später jedesmal, so oft das Quadrat des bisher gefundenen Theils der Wurzel am gehörigen Orte von der gegebenen Zahl weggenommen ist, setzt man zum Reste gleich die ganze folgende Classe (zwei Ziffern) derselben, und unter die erhaltene Zahl, so daß die letzte Ziffer derselben frei bleibt, das Doppelte des ersten Theils, dividirt damit in die gerade darüber stehende Zahl, schreibt den Quotienten, so bestimmt, wie oben vorgeschrieben wurde, in die noch offene Stelle hinter das Doppelte des ersten

Theils und multiplicirt mit demselben die ganze in zweiter Reihe stehende Zahl. Das Product setzt man als dritte Reihe unter die vorige und subtrahirt es von dem in erster Reihe stehenden Theile des gesammten Restes. Geht dieses an, so ist der Quotient die richtige gesuchte Ziffer der Wurzel; wo nicht, so setzt man nach und nach je um eine Einheit kleinere Zahlen an seine Stelle, bis der verlangte Abzug sich verrichten läßt. Das abzuziehende Product vereinigt dann in sich das doppelte Product des ersten und des nächstniedrigeren neuen Theils der Wurzel und das Quadrat eben dieses Theils, jedes an den ihm gebührenden Platz gestellt. Die gefundene Ziffer wird als niedrigste dem ersten Theile der Wurzel beigesellt, dem Reste abermals die folgende Classe der gegebenen Zahl angehängt, und so die Rechnung von Neuem begonnen. — Für das vorige Beispiel nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$
\begin{array}{lll}
 & & \text{a b c d} \\
 & \sqrt{55|29|40|96} & = 7436 \\
a^2 \,.\,. & \underline{49} & \\
 & 629 & \\
2a + b \,.\,. & 14[4 \; (\times 4) & \\
(2a+b).b & \underline{576} & \\
 & 5340 & \\
2A + c \,.\,.\,. & 148[3 \; (\times 3) & \\
(2A+c).c & \underline{.\;4449} & \\
 & 89196 & \\
2\alpha + d \,.\,.\,. & 1486[6 \; (\times 6) & \\
(2\alpha+d).d & \underline{89196} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

Welche Vorzüge hat die zuletzt angegebene Anordnung der Rechnung vor der ersten? — W.

2. Die Ausziehung der Quadratwurzel aus Brüchen kommt bekanntlich auf die aus ganzen Zahlen zurück, und zwar auf eine einzige, am Producte des Zählers und Nenners zu verrichtende, wenn man (nach §. 62. 3) zuvor den Zähler oder Nenner des gegebenen Bruchs zu einer vollständigen Quadratzahl macht. Letzteres

verdient den Vorzug, wenn die Wurzel irrational werden sollte, weil es natürlicher ist, eine bestimmte Vorstellung des Theils, durch welchen eine Größe ausgemessen werden soll, zum Grunde zu legen und die unvermeidliche Unsicherheit ihrer Bestimmung auf die Anzahl solcher Theile zurückzuschieben, als diese Zahl zwar genau anzugeben, aber die Größe des einzelnen Theils, wenn auch innerhalb gewisser Grenzen, unbestimmt zu lassen.

Weiter auszuführen und auf Beispiele anzuwenden.

Um also aus einem Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, ziehe man $\left(\text{nach der Vorschrift } \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt{(ab)}}{b}\right)$ **die Wurzel aus dem Producte des Zählers und Nenners und gebe ihr den Nenner des gegebenen Bruchs. Sind Zähler und Nenner dieses Bruchs, wenn er auf seine kürzeste Form gebracht wird, vollständige Quadratzahlen, so ist auch ihr Product eine solche, und die Wurzel aus demselben genau durch eine ganze Zahl auszudrücken.**

Zu beweisen und an Beispielen zu zeigen.

Im entgegengesetzten Falle wird diese Wurzel irrational. Begnügt man sich alsdann damit, sie nur in ganzen Zahlen auszuziehen, um den genäherten Werth als Zähler des gesuchten Bruchs anzusetzen; so ist dieser zwar zu klein, aber nicht um einen der in ihm gezählten Theile. Ein Bruch kann aber unzählig viele verschiedene Formen annehmen, und zum Nenner jede Zahl erhalten, die ein Vielfaches des gegebenen ist.

Man hat es also in seiner Gewalt, dem wahren Werthe der irrationalen Quadratwurzel eines Bruchs, indem man den Nenner (und natürlich in gleichem Maße auch den Zähler desselben) hinreichend vergrößert, bloß durch Ausziehung der Wurzel in ganzen Zahlen so nahe zu kommen, als man will. Die Wurzel des Bruchs bekommt denselben Nenner, welchen dieser hatte, und zum Zähler eine ganze Zahl, welche, obwohl zu klein, doch nicht um eine ganze Einheit von dem wahren gesuchten Werthe abweicht. Sie ist also gleichfalls zu klein, aber nicht um einen der Theile, welche ihr Nenner bezeichnet.

Demnach darf die Aufgabe, aus einem Bruche die Wurzel zu

ziehen, um auch diejenigen Fälle unter sich zu begreifen, wo dieselbe irrational wird, der obigen Erweiterung entsprechend, so gefaßt werden: unter allen Brüchen einer gewissen Benennung, welche der gegebene anzunehmen fähig ist, den größten zu finden, dessen Quadrat sich von diesem abziehen läßt. Die Lösung dieser Aufgabe ist schon im Vorigen gegeben und auf die Ausziehung der Quadratwurzel in ganzen Zahlen zurückgebracht. B.

Auch auf ganze Zahlen läßt sich das beschriebene Verfahren ausdehnen, und da dieselben in Brüche von beliebiger Benennung verwandelt werden können, vermöge seiner die Aufgabe lösen, unter allen Brüchen eines vorgeschriebenen Nenners den größten zu finden, dessen Quadrat von der gegebenen Zahl noch abgezogen werden kann. B.

Man pflegt indessen die Aufgabe der Wurzelausziehung aus und in Brüchen nicht in solcher Ausdehnung zu nehmen, sondern darauf zu beschränken, die Wurzel jeder Zahl, sofern zu ihrer Bestimmung Brüche erforderlich werden, als Decimalbruch auszudrücken. Auch dazu genügt das vorige Verfahren. Die Bildung und Bezeichnung der Decimalbrüche gestattet aber noch Vereinfachungen desselben.

Die Zahl, deren Wurzel man als Bruch von vorgeschriebenem Nenner auszudrücken verlangt, soll zuvor auf dieselbe Benennung gebracht werden. Gemeine Brüche und ganze Zahlen sind daher für den vorliegenden Zweck erst in Decimalbrüche zu verwandeln. Den Nenner eines Decimalbruchs erkennt man aus der Menge von Ziffern, welche sein Zähler hat. Diese müßte nun — nöthigenfalls durch Anhängen von Nullen, oder wenn der Bruch ein periodischer ist, durch Anhängen von Periodenziffern — der Anzahl von Nullen gleich gemacht werden, mit welcher der verlangte Nenner der Wurzel zu schreiben wäre. Durch Versetzung des Kommas ans Ende der erhaltenen Zahl bekäme man den Zähler des Bruchs, wenn man ihm seinen Nenner ausdrücklich untersetzen wollte. Nun soll der Zähler dieses Bruchs mit seinem Nenner multiplicirt werden. Man hätte also abermals in der Reihe der Ziffern, durch welche jener sich fortsetzt, das Komma um so viele Stellen nach rechts herunterzurücken, als dieser Nullen hat. War jener bloß der höchste Theil einer Zahl, die auch in tieferen Stellen noch geltende Ziffern hat, so sind die zu ergänzenden Stellen mit den zunächstfolgenden, sonst mit Nullen zu besetzen. Man findet also das geforderte Product mit einem Male, indem man gleich der gegebenen Zahl, wenn sie eine dekadisch gebildete, und sonst, nachdem sie in diese Form gebracht ist, doppelt so viele Ziffern nach dem Komma giebt, als der verlangte Nenner der Wurzel Nullen haben würde, und alle mit den etwa vorhergehenden als eine einzige ganze Zahl zusammennimmt. Die Wurzel dieser Zahl, selbst wieder als ganze Zahl bestimmt (gleich viel, ob durch dieselbe das Gesuchte vollständig oder bloß näherungsweise ausgedrückt wird), soll den vorgeschriebenen Nenner bekommen. Man schneidet also in derselben mit dem Komma die entsprechende Menge von Decimalbruchstellen ab, d. i. halb so viele, als behuf der Wurzelausziehung in die gegebene Zahl aufgenommen wurden.

Soll z. B. $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ bis auf Tausendstel entwickelt werden, so hat die Rechnung, um sich der allgemeinen Regel anzuschließen, nach und nach folgende Schritte zu thun:

$$\sqrt{12\tfrac{1}{2}} = \sqrt{12{,}5} = \sqrt{12{,}500} = \sqrt{\left(\frac{12500}{1000}\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{12500000}}{1000} = \frac{3535..}{1000} = 3{,}535\ldots;$$

sie kommt aber nach der aus jener abgeleiteten besonderen Vorschrift, indem man gleich $\sqrt{12\frac{1}{2}} = \sqrt{12{,}500000}$ setzt, darauf zurück, aus 12500000 die Wurzel in ganzen Zahlen auszuziehen ($= 3535$) und in dieser drei Decimalstellen mit dem Komma abzuschneiden ($= 3{,}535\ldots$).

$\sqrt{12}$, $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)}$, $\sqrt{101{,}23675}$, $\sqrt{\left(4\frac{21}{25}\right)}$, $\sqrt{\left(2\frac{1}{3}\right)}$ rc. bis auf Hundertstel, Zehntausendstel rc. zu berechnen. Am ersten und letzten Beispiele sind nochmals die verschiedenen Entwickelungsstufen anzugeben, welche die Rechnung nach der allgemeinen Regel zu durchlaufen hat.

Auf dasselbe Verfahren leitet auch die ursprüngliche Regel für die Ausziehung der Quadratwurzel aus Brüchen, nach welcher aus dem Zähler und aus dem Nenner für sich die Wurzel zu ziehen ist, sobald ihr die Bedingung gestellt wird, die Wurzel immer als eine dekadisch gebildete Zahl zu liefern. Auch sie fordert, daß schon die gegebene Zahl eine dekadisch gebildete sei, und wenn sie es nicht ist, zuvor in diese Form gebracht werde. Da ferner nur die höheren Einheiten paaren Ranges vollständige Quadratzahlen, und ihre Wurzeln Einheiten von halb so hohem Range sind; so muß die gegebene Zahl einen Nenner von doppelt so hohem Range bekommen, als man der Wurzel zu geben vorhat, oder, mit dem Komma geschrieben, — nöthigenfalls durch Anhängen von Nullen oder Periodenziffern — auf doppelt so viele Bruchstellen gebracht werden, als die Wurzel erhalten soll. Die so gewonnene Zahl, ohne das Komma als eine einzige ganze Zahl gelesen, ist der Zähler der gegebenen Zahl, ihre Wurzel, gleichfalls als ganze Zahl bestimmt, der Zähler, und die Wurzel des zugehörigen Nenners, eine Einheit von halb so hohem Range, der Nenner der gesuchten Wurzel.

Um also die Wurzel einer dekadisch gebildeten Zahl bis auf eine gewisse Menge von Bruchstellen (vollständig oder näherungsweise) zu entwickeln, giebt man dieser doppelt so viele Bruchstellen, zieht aus der erhaltenen Zahl, ohne das Komma zu berücksichtigen, die Wurzel wie in ganzen Zahlen, und schneidet in dieser halb so viele Bruchstellen, als jene hatte, mit dem Komma wieder ab — etwa fehlende durch Nullen ergänzend.

Die angedeuteten Schritte, durch welche aus der ursprünglichen Regel der Wurzelausziehung aus Brüchen die vorstehende abgeleitet ist, sind an der Aufgabe zu zeigen, $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ bis auf Tausendstel zu berechnen. — Andere Beispiele unmittelbar nach der letzten Vorschrift zu berechnen.

Woran läßt sich im Voraus erkennen, daß die Wurzel einer dekadisch gebildeten Zahl, welche auch Bruchziffern enthält, irrational ist? (S. Nro. 1.)

Das mechanische Verfahren der Wurzelausziehung aus mehrziffrigen ganzen Zahlen bedarf demnach, um auf dekadisch gebildete Zahlen überhaupt, auch wenn sie Brüche enthalten, anwendbar zu sein, nur noch der beiden Bestimmungen 1) daß die vorläufige Eintheilung der Zahl in Classen zu je zwei Ziffern von der Stelle des Kommas ausgehen, und 2) daß auch die Einerziffer der Wurzel wieder mit dem Komma bezeichnet werden muß. Am bequemsten geschieht dieses gleich während der Rechnung, indem das Komma hinter diejenige Ziffer der Wurzel gesetzt wird, welche sich ergiebt, wenn die Einer der gegebenen Zahl mit in Rechnung genommen werden.

Auf Beispiele anzuwenden.

3. Nachdem den bisherigen Vorschriften gemäß von der Wurzel einer mehrziffrigen, dekadisch gebildeten Zahl so viele Ziffern berechnet sind, als diese Classen hat, kann der letzte Rest (welcher jedesmal bleibt, wenn die gegebene Zahl keine vollständige Quadratzahl ist), noch zur Bestimmung mehrer niedrigerer Ziffern der Wurzel gebraucht werden, ohne daß es nöthig wäre, die Rechnung auf tiefere Stellen auszudehnen. Wie dieselbe einzurichten ist, ergiebt sich unmittelbar aus den Regeln des verkürzten Quadrirens (§. 60. 4).

Schließt nämlich die gegebene Zahl mit der Endziffer einer Classe (oder einer Ziffer paaren Ranges, wie man füglich auch diejenigen nennen darf, deren Nenner Einheiten paarer Ordnuug sind), und ist die Rechnung bis zu dieser Stelle fortgeführt; so berechnet man das Doppelte des bisher gefundenen Theils der Wurzel, dividirt damit, nach Ausschluß seiner niedrigsten Ziffer, in den vorliegenden Rest und zieht von demselben das gleichfalls um die letzte Ziffer verkürzte Product des Quotienten und Divisors ab. In den neuen Rest dividirt man wieder mit dem abermals um eine Stelle mehr verkürzten Divisor, und verfährt überhaupt wie bei der verkürzten Division (§. 20. 2), so oft die Rechnung sich erneuert, den Divisor und das Product aus ihm und dem gefundenen Quotienten um eine Stelle mehr verkürzend. Die Quotienten dürfen in der Ordnung, wie sie erfolgen, den vorigen Ziffern der Wurzel angereihet werden; z. B.

$\sqrt{69\frac{4}{9}} = \sqrt{69,44|44|44\,..} = 8,333|3333\,..$

```
 64
 ---
  544
  163
  489
  ----
   5544
   1663
   4989
   -----
    55544
    16663
    49989
    -----
     5555  : 1666[6 (= 2 . 8333)
     4999  (= 3 . 1666[6)
     ----
      555
      499  (= 3 . 166[66)
      ---
       55
       49  (= 3 . 16[666)
       --
        5
        4  (= 3 . 1[6666)
```

Bleibt bei der Abtheilung der gegebenen Zahl in Classen am Ende eine Ziffer (unpaaren Ranges) übrig, so führt man die Rechnung, durch welche die höchsten Ziffern der Wurzel gefunden werden, bis zur letzten vollzähligen Classe vollständig aus, hängt dem letzten Reste jene Ziffer an, und dividirt wie bisher in die erhaltene Zahl mit dem Doppelten des ersten Theils der Wurzel. Der Quotient (so weit er eine ganze Zahl wird) ist als nächste Ziffer der Wurzel anzusetzen, wenn das Product aus ihm und dem genannten Divisor, nachdem in die letzte Stelle desselben auch die Zehner des Quadrats dieser Ziffer aufgenommen sind, von der vorliegenden Zahl noch vollständig abgezogen werden kann. Alle niedrigeren Ziffern der Wurzel, zu deren Bestimmung der nun noch übrig bleibende Rest ausreicht, werden bloß durch verkürzte Division gefunden, indem man das Doppelte des jetzt berechneten Theils der Wurzel zum Divisor annimmt, denselben bei der ersten Division um zwei, bei jeder folgenden um eine Stelle mehr verkürzt, und eben so viele Stellen den nach einander abzuziehenden Producten abbricht; z. B.

```
√64|58,91|0 . . . = 80,36|735 . . .
 64
 ----------
    5891
    1603
    4809
   ----------
    10820
     1606 (× 6)
     9639
    ----------
     1181 : 160[72 (= 2.8036)
     1125 (= 7.160[72)
    ----------
       56
       48 (= 3.16[072)
      ----------
        8
        8 (= 5.1[6072)...
      ----------
```

Die unvollständige Rechnung, durch welche in den beiden hier unterschiedenen Voraussetzungen die letzten Ziffern der Wurzel gefunden werden, nennt man verkürzte Ausziehung der Quadratwurzel. Die Vortheile, welche sie gewährt, zumal wenn die gegebene Zahl eine bloß genäherte ist, und deren Wurzel so weit als möglich bestimmt werden soll, springen von selbst in die Augen.

Wie viel man sich auf eine nach dieser Methode berechnete Wurzel verlassen kann, ist nach früheren Bestimmungen über den Grad der Zuverlässigkeit eines Quotienten, der durch verkürzte Division gefunden ist, zu beurtheilen. (S. §. 20. 2 und §. 40. 4.)

An Beispielen zu zeigen.

Wie viele Ziffern der Wurzel können noch durch verkürzte Rechnung gefunden werden?

Eilfter Abschnitt.

Erhebung zum Cubus und Ausziehung der Cubikwurzel.

---

§. 64.

Allgemeine Sätze über die Erhebung einer Zahl zum Cubus

Die Potenz des dritten Grades (dritte Potenz) einer Zahl heißt ihr Cubus (Würfel, — aus Gründen, welche in der Geometrie zu erklären sind) — mit anderen Worten: der Cubus einer Zahl ist ein Product, welches dieselbe dreimal als Factor enthält.

a^3 (»Cubus, dritte Potenz von a«) $= a . a . a$.

Um also eine Zahl zum Cubus zu erheben, muß man sie mit sich selbst, und das Product nochmals mit ihr, oder das Quadrat derselben nochmals mit der Wurzel multipliciren:

$$a^3 = (a . a) . a = a^2 . a.$$

Für besondere Voraussetzungen hinsichtlich der Beschaffenheit und Form der gegebenen Wurzel lassen sich aus dem Begriff des Cubus folgende Sätze ableiten.

1. Der Cubus einer Zahl ist positiv oder negativ, jenachdem diese selbst positiv oder negativ ist.

$$(+a)^3 = +a^3 \quad [= (+a).(+a).(+a) = (+a^2).(+a)]$$
$$(-a)^3 = -a^3 \quad [= (-a).(-a).(-a) = (+a^2).(-a)]$$

2. Der Cubus eines Productes ist ein Product aus den Cuben seiner Factoren.

$$(a . b)^3 = a^3 . b^3$$

Auch als Regel auszudrücken und abzuleiten. — B.

Auch in umgekehrter Beziehung läßt sich von diesem Satze Gebrauch machen.

Wie?

3. Der Cubus eines Bruchs ist ein Bruch, dessen Zähler der Cubus vom Zähler, dessen Nenner der Cubus vom Nenner des gegebenen ist.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}.$$

Abzuleiten; als Regel und auch in der Kunstsprache der Division auszusprechen. — B.

Auch dieser Satz kann umgekehrt und so zur Umbildung geeigneter Formen angewandt werden.

Wie?

Der Cubus eines echten Bruchs ist ein kleinerer echter, der Cubus eines unechten (wozu auch ganze Zahlen gerechnet werden können) ein größerer unechter Bruch.

Ist der gegebene Bruch in den möglich kleinsten Zahlen ausgedrückt, so erscheint auch sein Cubus in kürzester Form.

Der Cubus eines unechten Bruchs, der nicht vollständig auf eine ganze Zahl zurückgeführt werden kann, läßt sich eben so wenig vollständig als ganze Zahl ausdrücken. — Also nur die Cuben ganzer oder auf solche zurückführbarer Zahlen sind selbst wieder ganze Zahlen oder auf solche zurückzubringen.

Alle diese Sätze sind zu beweisen und an Beispielen zu erläutern.

4. Der Cubus einer zweitheiligen Wurzel setzt sich aus vier Producten zusammen: dem Cubus des ersten Theils, dem dreifachen Producte aus dem Quadrate des ersten in den zweiten, dem dreifachen Producte des ersten in das Quadrat des zweiten, und dem Cubus des zweiten Theils.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$[(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3].$$

Ableitung beider Formeln, jeder für sich, und auch der zweiten aus der ersten. (S. §. 59. 4 Anmerk.) — B.

Wird folglich einer Zahl a, deren Cubus, a^3, berechnet ist, ein neuer Theil b zugelegt, um den Cubus der Summe zu finden, so sind zum Cubus des ersten Theils noch die drei zuletzt genannten

Producte $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ hinzuzufügen. So gefaßt, braucht die Regel nur wiederholt angewandt zu werden, um auch den Cubus jeder mehr als zweitheiligen Wurzel zu geben. Man setzt nämlich nach und nach jeden folgenden Theil an die Stelle des zweiten, **b**, und den Inbegriff aller vorhergehenden, dessen Cubus schon berechnet ist, an die Stelle des ersten, a. Demnach ist

$$
\begin{aligned}
(a + b + c + d + \text{ꝛc.})^3 = \; & a^3 \\
& + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
& + 3(a+b)^2 \, . \, c + 3(a+b) \, . \, c^2 + c^3 \\
& + 3(a+b+c)^2 \, . \, d + 3(a+b+c) \, . \, d^2 + d^3 \\
& + \text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

Durch fernere Entwickelung derjenigen Glieder dieser Formel, welche mehrtheilige Factoren oder Quadrate derselben enthalten, ist das Resultat in lauter solche Glieder aufzulösen, welche bloß aus einfachen Factoren bestehen. — B.*)

§. 65.

Erhebung dekadisch gebildeter Zahlen zum Cubus.

1. Der vorstehenden Entwickelung des Cubus mehrtheiliger Größen kann wieder auch die Bildung der dritten Potenz mehrziffriger dekadisch gebildeter Zahlen auf ähnliche Art untergeordnet werden, wie früher die Erhebung solcher Zahlen zum Quadrat der entsprechenden Vorschrift für die Bildung der zweiten Potenz mehrtheiliger Ausdrücke. Durch gemeine Multiplication würde freilich der Cubus solcher Zahlen ebenfalls, und zwar noch schneller und leichter zu finden sein; — gleichwohl verdient auch das Verfahren, welches sich aus jener allgemeinen Bildungsnorm ergiebt, schon aus dem Grunde entwickelt zu werden, weil es die Lösung der umgekehrten Aufgabe vorbereitet, eine Zahl in drei gleiche Factoren zu zerlegen (aus ihr die Wurzel dritten Grades oder die Cubikwurzel zu ziehen).

*) Den Beispielen, an welchen die Regeln dieses §. zu üben sind, können diejenigen zum Vorbilde dienen, welche bei den entsprechenden Regeln des §. 59 gegeben sind.

Mag nun vorerst die mehrziffrige Zahl, deren Cubus berechnet werden soll, eine ganze Zahl sein.

a. Die einzelnen Theile derselben werden durch Ziffern verschiedenen Ranges dargestellt. Am bequemsten ist es, die Rechnung bei der höchsten Ziffer anzufangen, diese als ersten, die nächste als zweiten u. s. f. allemal die nächstniedrigere Ziffer als neuhinzukommenden Theil der Wurzel zu betrachten, um in feststehender Ordnung dem Cubus des ersten Theils zuerst das dreifache Product seines Quadrats und des zweiten, dann das dreifache Product des ersten in das Quadrat des zweiten und zuletzt den Cubus dieses zweiten Theils hinzuzufügen. So oft dabei die Rechnung zu einem neuen Theile fortschreitet, ist die Summe aller vorhergehenden als erster zu behandeln. Man erhält diese Summe, indem man alle früheren Ziffern mit Beibehaltung ihres Ranges als eine einzige Zahl zusammennimmt. Und denkt man diese als einen Inbegriff von Einheiten ihrer letzten Ziffer, so zählt der zweite Theil stets Einheiten der nächstniedrigeren Ordnung als der erste. Man kann daher die Rangfolge der nach einander zu entwickelnden Producte im Voraus bestimmen. Gehört nämlich der erste Theil, a, der nten, so muß der zweite, b, als nächstniedrigerer der $(n-1)$ten Ordnung angehören. Die Ordnungszahl eines Productes, — um der Kürze wegen mit diesem Worte diejenige Zahl zu bezeichnen, welche angiebt, der wievielten Ordnung eine Ziffer oder ein Inbegriff von Ziffern angehört — die Ordnungszahl eines Productes setzt sich aus denen seiner Factoren durch Addition zusammen. Die Ordnungszahl eines Quadrats ist zweimal (§. 60. 1), eines Cubus dreimal so groß als die Ordnungszahl der Wurzel. Demnach erhält man für die Producte

	a^3	$+\,3a^2.b$	$+\,3a.b^2$	$+\,b^3$
die Ordnungszahlen	$3n,$	$2n+(n-1),$	$n+2(n-1),$	$3(n-1),$
oder	$3n,$	$3n-1,$	$3n-2,$	$3n-3;$

mit anderen Worten: jedes folgende Product dieser Reihe hat unter der Voraussetzung, daß a und b zwei Zahlen benachbarten Ranges sind, den nächstniedrigeren Rang wie das vorhergehende.

An Bei[illegible]len zu erläutern, auch wenn b eine Einerziffer, also $n-1=0$ ist.

Man darf daher die einzelnen Producte, aus welchen nach der obigen Vorschrift der Cubus einer mehrziffrigen Zahl zusammenzusetzen ist, zuerst aus den einzelnen Ziffern und Zifferninbegriffen derselben ohne Berücksichtigung ihres Ranges berechnen, wenn man hernach alle diese Producte so unter einander stellt, daß die Endziffer jedes folgenden eine Stelle weiter nach rechts herausgerückt erscheint, als die des vorhergehenden. Den Beschluß macht der Cubus der Einerziffer, welcher selbst wieder in der Einerstelle endigt. Werden also sämmtliche Producte in der ihnen angewiesenen Stellung addirt, so ist die Summe der verlangte Cubus.

Hiernach berechnet sich also z. B.

$$\overset{a}{7}\,\overset{b}{4}\,\overset{c}{5}{}^3, \text{ wie folgt:}$$

7^3	343	a^3	
$3.7^2.4$	588	$3a^2b$	A^3
$3.7.4^2$	336	$3ab^2$	
4^3	64	b^3	
$3.74^2.5$	82140	$3A^2c$	
$3.74.5^2$	5550	$3Ac^2$	
5^3	125	c^3	

$$745^3 = 413493625.$$

B. — Das Verfahren, wenn eine oder mehre Nullen in der Wurzel vorkommen.

b. Noch etwas einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn man die drei Producte, welche in fortschreitender Entwickelung aus dem jedesmaligen höchsten und nächstniedrigeren Theile der Wurzel zu bilden sind, nicht einzeln als $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, sondern in ein einziges zusammengezogen, nach der Vorschrift

$$(3a^2 + 3ab + b^2) . b,$$

berechnet. Die nöthigen Abänderungen des Verfahrens ergeben sich hieraus von selbst: es genügt, dieselben an dem vorigen Beispiele zu zeigen.

$$\begin{array}{llll}
 & \text{a b c} & & \\
 & 745^3 = & 343 \;\ldots\ldots & a^3 \\
 & & 62224 \;\ldots & (3a^2+3ab+b^2).b[=p] \\
(74=A) & & \underline{8269625} & (3A^2+3Ac+c^2).c[=p'] \\
 & = & 413493625 &
\end{array}$$

Nebenrechnungen:

$$\begin{array}{rll|rll}
147 & \ldots & 3a^2 & 16428 & \ldots & 3A^2 \\
84 & \ldots & 3ab & 1110 & \ldots & 3Ac \\
\underline{16} & \ldots & b^2 & \underline{25} & \ldots & c^2 \\
15556 & & & 1653925 & & \\
\underline{\times\ 4} & \ldots & b & \underline{\times\ 5} & \ldots & c \\
62224 & \ldots & p & 8269625 & \ldots & p'
\end{array}$$

Die Vorschrift ist in Worten auszudrücken. — Die Rangfolge der danach zuerst zu berechnenden drei Producte zu bestimmen, daraus die Regel ihrer Stellung bei der Addition abzuleiten, — und endlich anzugeben, wie die Productenreihen, aus welchen so der Cubus sich zusammensetzt, zur Addition unter einander zu stellen sind. — B.

2. Der Cubus jeder Ziffer der Wurzel hat einen dreimal so hohen Rang als sie selbst, den Cubus der Einerziffer nicht ausgenommen, der wie sie selbst vom Range 0 ist. Der Cubus einer mehrziffrigen Zahl hat also mindestens so viele Stellen, deren Ordnungszahlen durch 3 theilbar sind, — die Einerstelle als solche mitgerechnet — als die Wurzel Ziffern: er hat deren aber *auch nicht mehr*.

Der Beweis ist auf ähnliche Art, wie für den entsprechenden Satz bei der Bildung des Quadrats mehrziffriger Zahlen (§. 60. 2) zu führen und durch Beispiele zu erläutern.

3. Wird nun die allgemeinere Aufgabe gestellt, mehrziffrige *dekadisch gebildete Zahlen*, *Decimalbrüche* mit eingeschlossen, zum Cubus zu erheben; so stelle man sich die gegebene Zahl zunächst wieder als einen einzigen Bruch vor. Vom Zähler desselben, einer ganzen Zahl, welche aus der gegebenen bloß durch Aufhebung des Kommas entspringt, läßt sich der Cubus nach den vorigen Regeln berechnen. Der Cubus des Nenners, einer höheren Einheit, welche mit so vielen Nullen geschrieben wird, als die gegebene Zahl Bruchstellen hat, ist selbst wieder eine höhere Einheit,

die mit dreimal so vielen Nullen zu schreiben ist. Eine gleiche Anzahl von Bruchstellen ist also mit dem Komma in dem Cubus des Zählers abzuschneiden, um ihm, wie es die Regel fordert (§. 64. 3), den Cubus des Nenners als solchen wiederzugeben, und das Resultat in der abgekürzten Form der Wurzel zu erhalten. Daher die Regel: **um eine dekadisch gebildete, mit dem Komma geschriebene Zahl zum Cubus zu erheben, berechne man ihren Cubus zuerst, ohne das Komma zu berücksichtigen, wie den einer ganzen Zahl, und schneide in demselben dreimal so viele Bruchstellen ab, als die Wurzel enthielt,** — etwa fehlende durch Nullen ergänzend.

$$7{,}45^3 = \left(\frac{745}{100}\right)^3 = \frac{745^3}{100^3} = \frac{413493625}{1000000} = 413{,}493625;$$

$$0{,}14^3 = 0{,}002744. \text{ — } \mathfrak{B}.$$

Die Stelle der Einer in dem Cubus einer dekadisch gebildeten Zahl kann aber auch dadurch bestimmt werden, daß man das Komma gleich während der Rechnung hinter den Cubus der Einerziffer, und an den entsprechenden Platz in die Summe setzt. B.

Anmerk. Für den Fall, daß der Cubus einer bloß genäherten Zahl so genau als möglich, oder der Cubus jeder beliebigen anderen vielziffrigen Zahl nur unvollständig, bis zu den Einheiten eines gewissen Ranges herab, berechnet werden soll, läßt sich aus dem bisher entwickelten Verfahren ein solches ableiten, welches alle unnützen Rechnungen beseitigt, — ein verkürztes Verfahren. Durch die verkürzte Multiplication ist jedoch eben dasselbe, und zwar noch leichter und sicherer zu leisten. Die Ableitung jenes Verfahrens würde daher hauptsächlich nur den Nutzen haben, die Auflösung der umgekehrten Aufgabe der verkürzten Ausziehung der Cubikwurzel vorzubereiten. Es werden aber später (in dem Gebrauche der Logarithmen) Mittel gefunden werden, nicht bloß die zweite, sondern auch schon die erste Aufgabe (und alle ihnen verwandte) mit ungleich weniger Mühe zu lösen. Also auch in dieser Hinsicht verliert die Ableitung einer auf den genannten Zweck abzielenden Methode ihre praktische Wichtigkeit.

Gleichwohl ist dieselbe als nützliche Uebung in dergleichen Entwickelungen anzuempfehlen. Hauptsächlich ist dabei zu beachten, daß mit jedem Fortschreiten zu der nächstniedrigeren Ziffer der Wurzel das Product $3a^2b$ um zwei, das Product $3ab^2$ dagegen nur um eine Stelle am Ende zunimmt, mithin, da jedes drei Stellen tiefer herabzurücken ist, als das vorhergehende derselben Art, dem ersten regelmäßig nur eine, dem letzteren dagegen immer zwei Stellen mehr abzubrechen sind, während b^3, als höchstens nur drei Stellen füllend, bei der verkürzten Rechnung ganz übergangen werden kann.

§. 66.

Ausziehung der Cubikwurzel. — Möglichkeit derselben. — Allgemeinere Bestimmung ihrer Aufgabe.

1. Der Erhebung einer Zahl zum Cubus ist die Ausziehung der **Wurzel dritten Grades** oder der **Cubikwurzel** entgegengesetzt. Sie verlangt die Zerlegung einer Zahl in drei gleiche Factoren, um die Größe eines solchen Factors, der gesuchten Wurzel, zu bestimmen. Ihr Zeichen ist $\sqrt[3]{}$, z. B. $\sqrt[3]{64} = 4$.

2. Durch die Ausziehung der Cubikwurzel wird demnach eine vorangegangene Erhebung zum Cubus, und umgekehrt jene durch diese wieder aufgehoben, so daß eine Zahl, an welcher beide Operationen, eine nach der anderen, verrichtet werden sollen, ungeändert bleibt.

$$\sqrt[3]{(a^3)} = (\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a. \qquad \text{B.}$$

3. Was nun die Möglichkeit der Cubikwurzelausziehung betrifft, so wird dieselbe durch das Vorzeichen der gegebenen Zahl nicht beschränkt, weil der Cubus jeder Zahl, wie diese, positiv oder negativ wird, während seine Größe dieselbe bleibt.

An einem Beispiele weiter auszuführen.

Ob aber auch der Größe nach aus jeder Zahl die Cubikwurzel gezogen werden könne, hängt davon ab, ob sich dieselbe von jeder beliebigen ganzen Zahl angeben lässt, weil die Ausziehung der Cubikwurzel aus Brüchen auf die aus ganzen Zahlen zurückkommt. Allein nur die wenigsten ganzen Zahlen gestatten die Ausführung dieser Operation im strengen Sinne. Zwischen die Cuben je zwei benachbarter ganzer Zahlen (z. B. 3^3 und 4^3, oder 27 und 64) fallen stets mehre andere ganze Zahlen, und zwar desto mehr, je größer jene Wurzeln sind. Als Cubikwurzeln solcher Zahlen (z. B. 28, 29, 30 ꝛc. bis 63) können folglich keine ganze, ebenso wenig aber auch gebrochene (etwa unechte Brüche, die zwischen jenen Wurzeln lägen) angenommen werden. Denn die Cuben gebrochener Zahlen, die nicht auf ganze zurückgebracht werden können, sind selbst wieder Zahlen der nämlichen Art. Es giebt also überhaupt keine Zahlen, deren dritte Potenzen den ganzen Zahlen, die zwischen den Cuben zwei benachbarter anderer liegen, gleich kämen; — und wie schon unter den ganzen Zahlen, so giebt es, nach einem leicht vorherzusehenden Schlusse, auch unter den Brüchen unendlich viele, aus welchen, streng genommen, die Cubikwurzel gar nicht gezogen werden kann. Auch diese Aufgabe führt also in vielen, ja den meisten Fällen auf Irrationalausdrücke.

Was schon im Allgemeinen über den Sinn und die Brauchbarkeit solcher Ausdrücke zur arithmetischen Größenbestimmung (§. 61. 5) gesagt ist, gilt auch von irrationalen Cubikwurzeln. Die Größe, welche sie bestimmen sollen, ist keines genauen und vollständigen Zahlenausdrucks fähig (incommensurabel gegen die gewählte Einheit). Man muß sich damit begnügen, dieselbe zwischen Grenzen einzuschließen, und diese nach Bedürfniß einander so nahe bringen zu können, daß man den einen Grenzwerth (gewöhnlich den kleineren) statt des wahren setzen darf.

5. Um daher in allen Fällen die Ausziehung der Wurzel dritten Grades zulässig zu finden, und wenn die Zahl, an welcher sie verrichtet werden soll, auch keine vollständige Cubikzahl ist, in der Bestimmung des Grenzwerthes der gesuchten Wurzel alle Willkür auszuschließen, vertauscht man den ursprünglichen Sinn der Aufgabe mit folgendem: unter allen Zahlen einer vorgeschriebenen Form (ganzen Zahlen oder Brüchen, zumal Decimalbrüchen, von vorgeschriebenem Nenner) die größte zu finden, deren Cubus von der gegebenen Zahl noch abgezogen werden kann. (Vergl. §. 61. 6.)

Vorläufig durch ein Beispiel zu erläutern.

Ist die gegebene Zahl genau der Cubus einer anderen, so kommt diese (umfassendere) Aufgabe mit der ursprünglichen überein.

§. 67.

Allgemeine Sätze über die Ausziehung der Cubikwurzel.

In dem zuletzt angegebenen Sinne ist die Ausziehung der Cubikwurzel immer möglich, und die Wurzel selbst eine unzweideutig bestimmbare Zahl. Wird sie irrational, so tritt an die Stelle des wahren ein Näherungswerth. Dieß vorausgesetzt, kann die Beziehung zwischen einer Zahl und ihrer dritten Potenz, vermöge deren früher (§. 64) aus gewissen Eigenthümlichkeiten der Wurzel die ihres Cubus abgeleitet wurden, mit gleicher Allgemeinheit auch zu dem umgekehrten Schlusse, von der besonderen Beschaffenheit und Form gegebener Zahlen auf die ihrer Cubikwurzeln, benutzt werden.

1. Die Cubikwurzel einer positiven Zahl ist positiv, einer negativen negativ.

$$\sqrt[3]{(+a)} = +\sqrt[3]{a};$$
$$\sqrt[3]{(-a)} = -\sqrt[3]{a}.$$

2. Die Cubikwurzel eines Productes ist ein Product aus den Cubikwurzeln seiner Factoren.

$$\sqrt[3]{(a.b)} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}.$$

Auch als Regel auszudrücken. — B.

Auch umgekehrt läßt sich dieser Satz anwenden.

Wie?

3. Die Cubikwurzel eines Bruchs ist wieder ein Bruch, der die Cubikwurzel des Zählers zum Zähler, und die des Nenners zum Nenner erhält.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Als Regel auszudrücken. — B.

Auch dieser Satz kann wieder umgekehrt und so zur Umformung passender Ausdrücke gebraucht werden.

Wie?

Nur wenn Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs nach Aufhebung gemeinschaftlicher Factoren beide vollständige Cubikzahlen sind, ist die Cubikwurzel desselben rational, — in jedem anderen Falle irrational.

Aufzählung dieser Fälle. — B. — Welcher Fall wird öfter eintreten, daß die Cubikwurzel des gegebenen Bruchs rational oder irrational ist? — und weßhalb?

Mag übrigens die Cubikwurzel eines Bruchs rational oder irrational sein, wenn auch im letzteren Falle vorzugsweise, überhaupt aber, sobald zur Bestimmung derselben vielziffrige Zahlen erfordert werden, ist die doppelte Wurzelausziehung, aus dem Zähler und Nenner besonders, eine lästige Rechnung. Die Zurückführung derselben auf eine einzige Wurzelausziehung, wobei die andere durch minder beschwerliche Operationen ersetzt wird, muß daher besonders in practischer Hinsicht willkommen sein, und das Mittel dazu ist leicht gefunden. Wird nämlich der Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs zuvor mit dem Quadrate des Zählers oder Nenners multiplicirt, so hat der Bruch in dieser neuen Form entweder zum Zähler oder zum Nenner eine vollständige Cubikzahl, deren Wurzel im Voraus bekannt, nämlich der vorige Zähler oder Nenner ist. Im ersten Falle ist also dem gegebenen Zähler die Cubikwurzel aus dem Producte seines Quadrats und des Nenners zum Nenner, im anderen dem Nenner die Cubikwurzel aus dem Producte seines Quadrats und des Zählers zum Zähler zu geben.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{a\,.\,a^2}{b\,.\,a^2}\right)} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{(b\,.\,a^2)}} = \frac{a}{\sqrt[3]{(b\,.\,a^2)}};$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{a\,.\,b^2}{b\,.\,b^2}\right)} = \frac{\sqrt[3]{(a\,.\,b^2)}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{(a.b^2)}}{b}. \text{ — B.}$$

Die Cubikwurzel eines unechten Bruchs ist ein kleinerer unechter, die eines echten ein größerer echter Bruch.

Weßhalb? — B.

4. Die Cubikwurzel mehrgliedriger Zahlen und Formeln zu bestimmen, ist ein Theil derselben nach dem anderen durch Versuche festzustellen. Die dabei stattfindende Willkür wird nur durch Rücksicht auf die besondere Gestalt der gegebenen Zahl oder ihres allgemeinen Ausdrucks, so wie auf besondere Rechnungszwecke beschränkt. —

Den ersten Theil der Wurzel bestimmt man wo möglich so, daß sein Cubus mit einem Theile der gegebenen Zahl übereinstimmt. Nach Aufhebung dieses Cubus dividirt man in einen schicklich gewählten Theil des Restes mit dem dreifachen Quadrate des gefundenen Theils. Der Quotient darf aber erst dann als zweiter Theil der Wurzel angenommen werden, wenn außer dem Producte aus ihm und dem genannten Divisor auch das dreifache Product seines Quadrats und des ersten Theils, wie auch sein Cubus von dem Reste noch subtrahirt werden kann. Bleibt nach Abzug dieser Producte abermals ein Rest, so verfährt man mit ihm gerade so wie mit dem vorigen, nur daß fortan nicht mehr ein einzelner, sondern die Summe aller bereits gefundenen als erster Theil der Wurzel anzusehen ist. —

Läßt sich auf diese Weise, durch Abzug der Producte, welche nach und nach bei der Aufnahme späterer Theile in die Wurzel zu entwickeln sind, die gegebene Zahl völlig erschöpfen; so ist sie eine vollständige Cubikzahl und ihre Wurzel rational. Im entgegengesetzten Falle, wo die Rechnung unaufhörlich neue Glieder der Wurzel liefern würde, ohne doch jemals den Werth derselben vollständig erreichen zu können, hat die Entwickelung einer beschränkten Anzahl dieser Glieder nur für besondere Voraussetzungen und Zwecke Werth.

Beide Fälle sind an Aufgaben, welche die Cubikwurzel aus mehrgliedrigen allgemeinen Ausdrücken zu ziehen verlangen, nachzuweisen. Für die ersten können die §. 64. 4 entwickelten Formeln (oder nach ihnen gebildete) angenommen werden.

Einige Kennzeichen der Unmöglichkeit, die Entwickelung der Cubikwurzel mehrgliedriger Ausdrücke zu schließen.

§. 68.

Ausziehung der Cubikwurzel aus dekadisch gebildeten Zahlen.

1. Wie überhaupt das Rechnen mit dekadisch gebildeten Zahlen den allgemeinen Regeln für das Rechnen mit mehrtheiligen Ausdrücken sich unterordnet; so kann auch hier wieder aus der allgemeinen Vorschrift für die schrittweise Entwickelung mehrtheiliger Cubikwurzeln das Verfahren abgeleitet werden, aus dekadisch gebildeten Zahlen die Cubikwurzel zu ziehen, wenn

diese eine mehrziffrige Zahl wird. Nähere Bestimmungen dieses Verfahrens ergeben sich durch Umkehrung des oben (§. 65.) dargestellten, den Cubus solcher Zahlen aus den einzelnen Theilen derselben zusammenzusetzen.

Um mit dem einfachsten Falle anzufangen, werde angenommen, die Zahl, deren Cubikwurzel gesucht wird, sei eine ganze Zahl, und auch die Wurzel solle nur als ganze Zahl bestimmt werden, — d. h. es solle, dem erweiterten Begriffe dieser Rechnungsart zufolge, die größte ganze Zahl gesucht werden, deren Cubus in der gegebenen noch enthalten ist. Das dazu dienende Verfahren nennt man die Ausziehung der Cubikwurzel *in ganzen Zahlen*.

a. Ist die gegebene Zahl kleiner als **1000**, so ist ihre Cubikwurzel in dem vorbemerkten Sinne eine Einerzahl und wird unmittelbar durch Vergleichung der gegebenen mit den Cuben der Einerzahlen (deren Reihe als bekannt vorauszusetzen ist) gefunden; z. B.

$$\sqrt[3]{343} = 7;\quad \sqrt[3]{35} = 3, \ldots \text{ıc.} — \qquad \text{B.}$$

Ist aber die gegebene Zahl mit mehr als drei Ziffern geschrieben, so bekommt auch ihre Cubikwurzel mehre Ziffern, und zwar eben so viele, als jene Stellen enthält, deren Ordnungszahlen durch **3** theilbar sind, die Einerstelle als solche mitgerechnet. (S. §. 65. 2) Um diese Stellen gleich kenntlich zu machen, theilt man die gegebene Zahl von den Einern anfangend in Classen zu je drei Ziffern: die höchste kann deren auch nur eine oder zwei enthalten. Am Ende jeder dieser Classen endigt sich der Cubus einer Ziffer der Wurzel: in der höchsten liegt der Cubus der höchsten Ziffer. Als solche ist demnach die größte Einerzahl anzunehmen, deren Cubus von der genannten Classe noch abgezogen werden kann. Sie heiße **a**. Ist dieser Abzug wirklich vollbracht, so wird durch Zuziehung der nächsten Ziffer der folgenden Classe zum Reste derjenige Theil der gegebenen Zahl abgesondert, welcher das Product $3a^2b$ enthält, wenn **b** die zweite Ziffer bedeutet. Dividirt man also jenen Theil durch das dreifache Quadrat der ersten Ziffer, $3a^2$; so ist die Einerzahl, welche in den Quotienten kommt, — größere Zahlen sind aus leicht begreiflichen Gründen von diesem Versuche auszuschließen (Weßhalb?) — jedenfalls die größte, welche als zweite Ziffer der Wurzel angenommen werden kann. Ob sie dieß aber wirklich ist, hängt davon ab, ob — diese Zahl als b gesetzt — nach Abzug des Productes $3a^2b$ von dem vorliegenden Theile der gegebenen Zahl, wenn dem Reste die nächste noch unberührte Ziffer derselben angehängt wird, auch das Product $3a^2b$, und von dem neuen Reste, abermals nach Zuziehung der nächsten unberührten Ziffer, auch noch b^3 wirklich abgezogen werden kann. Geht dieses an, so ist die bezeichnete Zahl die gesuchte Ziffer der Wurzel: wo nicht, so muß sie nach und nach je um eine Einheit so lange verringert werden, bis sie den aufgestellten Bedingungen genügt. — Zur Auffindung jeder folgenden Ziffer sind die beschriebenen Versuche mit dem einzigen Unterschiede zu wiederholen, daß statt der höchsten Ziffer nun die aus den bisher gefundenen zusammengesetzte Zahl als erster Theil der Wurzel, a, zu setzen ist. Allmählig werden dabei die niedrigeren Ziffern der gegebenen Zahl zu den jedesmal bleibenden Resten gezogen, bis mit dem letzten Versuche die Einerziffer der Wurzel bestimmt wird. Je nachdem durch den Abzug ihres Cubus von dem letzten Reste die gegebene Zahl erschöpft wird oder nicht, ist dieselbe eine vollständige Cubikzahl oder nicht, und die Wurzel rational oder irrational.

Die Ausführung der beschriebenen Rechnung ist aus folgendem Beispiele zu ersehen:

$$
\begin{array}{lrl}
 & & \qquad\qquad a\ b\ c \\
 & \sqrt[3]{413|493|625} & = 745 \\
 & a^3 \ldots\ 343 & \\
 & 704 & [:147\ (=3a^2)] \\
 & 3a^2b \ldots\ 588 & \\
A^3 & 1169 & \\
 & 3ab^2 \ldots\ 336 & \\
 & 8333 & \\
 & b^3 \ldots\ 64 & \\
 & 82696 & [:16428\ (=3A^2)] \\
 & 3A^2c \ldots\ 82140 & (74 = A) \\
 & 5562 & \\
 & 3Ac^2 \ldots\ 5550 & \\
 & 125 & \\
 & c^3 \ldots\ 125 &
\end{array}
$$

B. — auch solche, in welchen die zweite oder eine spätere Ziffer der Wurzel erst nach einem oder mehren Fehlversuchen richtig gefunden, — 0 wird, — die gegebene keine vollständige Cubikzahl ist, u. dergl.

b. Anstatt die drei Producte, welche aus der jedesmal zu bestimmenden Ziffer (b) und dem ganzen höheren Theile der Wurzel (a) zu bilden sind, einzeln zu berechnen und abzuziehn, kann man sie auch nach der Formel $(3a^2 + 3ab + b^2) . b$, — wie §. 65. 1, b angegeben ist — in eins zusammenziehn und so auf einmal subtrahiren. Natürlich muß, um denjenigen Theil der gegebenen Zahl zu erhalten, von welchem diese Summe wegzunehmen ist, jedesmal die ganze folgende Classe von (je drei) Ziffern dem Reste angehängt werden, welcher von dem höheren Theile der Zahl bei der vorigen Subtraction geblieben ist.

Auch durch diese Anordnung wird übrigens die Umständlichkeit der Rechnung nicht erheblich vermindert. — Zur Versinnlichung des Verfahrens mag wieder das vorige Beispiel dienen.

$$\sqrt[3]{413|493|625} = \overset{a}{7}\,\overset{b}{4}\,\overset{c}{5}$$

a^3 . . 343

704|93

[: 147 | (= $3a^2$)]

p . . . 62224

82696|25

[: 16428 | (= $3A^2$)]

p' 8269625

Nebenrechnungen:

147 . . . . $3a^2$	16428 . . . . $3A^2$
84 . . $3ab$	1110 . . $3Ac$
16 . b^2	25 . c^2
15556	1653925
× 4 . . b	× 5 . . . c
62224 . . p	8269625 . . . p'

B.

2. Die Ausziehung der Cubikwurzel aus und in Brüchen kommt bekanntlich auf die aus ganzen Zahlen zurück. Den Fall vorgesehen, daß die Cubikwurzel irrational wird, stellt man die Aufgabe allemal so: unter allen Brüchen eines vorgeschriebenen Nenners, — vorausgesetzt, daß die gegebene Zahl auf diese Benennung gebracht werden kann, — den größten zu finden, dessen Cubus in der gegebenen Zahl enthalten ist. Wie diese Aufgabe ganz allgemein gelöst, und vermittelst einer leichten Formverwandlung der gegebenen Zahl auf die einmalige Verrichtung der verlangten Operation an einer ganzen Zahl zurückgebracht werden könne, ist aus früheren Erörterungen (§. 67. 3) zu entnehmen. Hier darf die Angabe der Regel auf die fast ausschließlich gestellte Forderung beschränkt werden, die Cubikwurzel als Decimalbruch von vorgeschriebenem Nenner darzustellen.

Damit aber der Nenner der Cubikwurzel eine höhere dekadische Einheit werde, muß auch die gegebene Zahl eine solche, und zwar von dreimal so hohem Range, zum Nenner haben. Sie muß folglich eine dekadisch gebildete sein, oder in diese Form gebracht, und auf dreimal so viele Bruchstellen entwickelt werden, als die Wurzel bekommen soll. Nachdem dieses geschehen, ist aus ihr, ohne Berücksichtigung des Decimalkommas, die Cubikwurzel wie in ganzen Zahlen zu ziehen, und dem dadurch gefundenen Zähler der zuvor bestimmte Nenner durch Abschneiden der entsprechenden Menge von Bruchstellen wieder zu geben.

Hiernach ist z. B., bis auf Tausendstel berechnet,

$$\sqrt[3]{1\tfrac{5}{8}} = \sqrt[3]{1{,}625000000} = 1{,}175\ldots$$

Weitere Begründung dieser Regel. — B.

Die Einerziffer der Wurzel kann auch gleich während der Rechnung mit dem Komma bezeichnet werden.

Anmerk. Aus Gründen, welche schon in der Anmerk.

zu §. 65. angedeutet sind, unterbleibt hier die Ableitung eines verkürzten Verfahrens für die Ausziehung der Cubikwurzel.

Als nützliche Uebung in der selbstständigen Entwickelung solcher Rechenmethoden und der eigenen Auffindung gewisser Rechnungsvortheile bleibt dieselbe indessen empfehlenswerth. Das verkürzte Verfahren der Erhebung mehrziffriger Zahlen zum Cubus muß dabei als Richtschnur dienen.

Zwölfter Abschnitt.

Potenzirung und Wurzelausziehung im Allgemeinen. Rechnen mit Potenzen und Wurzelgrößen.

§. 69.

Allgemeine Sätze über die Potenzirung.

Auf dieselbe Art, wie die Erhebung zur Potenz und die Ausziehung der Wurzel des zweiten und dritten Grades auf bestimmte Regeln zurückgebracht sind, ließen sich in stufenweisem Fortschritt auch Gesetze und Regeln der Potenzirung und Wurzelausziehung des vierten, fünften, sechsten Grades u. s. f. entwickeln. Nur die Rücksicht auf praktische Brauchbarkeit kann die Grenze bestimmen, bis wie weit auf diesen Zweck gerichtete Untersuchungen fortzusetzen sind; — und den Forderungen der Wissenschaft zu genügen, müßten sich dieselben zur Darstellung allgemeiner Gesetze und Regeln erheben, nach welchen sowohl die Potenz als auch die Wurzel jedes beliebigen höheren Grades (n) darzustellen wäre. In ihrem ganzen Umfange diese Aufgabe zu lösen, bleibt der höheren Arithmetik vorbehalten, welche durch neue Hülfsmittel und Methoden die Schwierigkeiten derselben leichter besiegt. In den gewöhnlicheren Rechnungen aber werden am häufigsten Potenzen und Wurzeln des zweiten und dritten, selten höheren Grades gefordert. Wie der Grad der zu bildenden Potenz oder der auszuziehenden Wurzel steigt, mehren sich aus leicht begreiflichen Gründen auch die Schwierigkeiten der Berechnung, und hauptsächlich wohl, um diese zu vermindern, hat man ein indirectes (übrigens auch in anderen Beziehungen wichtiges) Verfahren ersonnen, von welchem in der Folge (Abschn. XIV.) die Rede sein wird. Um dasselbe zu begründen, aber auch schon, um mit Ausdrücken, in welchen Zahlen unter der Form von Potenzen oder Wurzeln vorkommen, wenigstens andeutungsweise und so weit es ohne wirkliche Entwickelung ihrer Werthe angeht, rechnen zu können, sind die Eigenschaften solcher Zahlformen in erforderlicher Allgemeinheit zu erörtern, und die möglichen Umbildungen und Verknüpfungen derselben auf bestimmte Regeln zu bringen. — Dieß ist der Zweck des vorliegenden Abschnitts.

Aus der Bildungsweise und den Eigenschaften der Potenzen beliebiger Grade werden die der Wurzeln abzuleiten sein. Jene sind daher zuerst zu untersuchen.

Die Forderung, eine Zahl zur Potenz eines vorgeschriebenen Grades zu erheben — vorausgesetzt, wie es hier geschieht, daß dieser eine ganze, positive, oder richtiger, beziehungslose (absolute) Zahl ist — führt immer auf eine ganz bestimmte Vorstellung der gesuchten Zahl. Eine eigentliche Berechnung derselben ist freilich unmöglich, wenn Wurzel und Exponent unbestimmt gelassen und bloß durch Buchstaben bezeichnet werden, wie in dem Ausdrucke a^n. Aber sobald an deren Stelle besondere Werthe träten, würde aus ihrer vorschriftsmäßigen Verbindung stets nur eine einzige, zweifellos bestimmte Zahl entspringen. Insofern nun diese Verbindung, welche in allgemeinen Zeichen bloß angedeutet werden kann, als wirklich vollzogen gedacht wird, dürfen auch schon Ausdrücke, welche dieselbe noch fordern, Potenzen genannt, und als Zahlen von bestimmter Geltung angesehen werden.*)

1. Das Vorzeichen einer Potenz (a^n) richtet sich nach dem der Wurzel und nach ihrem Exponenten.

Von positiven Wurzeln sind die Potenzen aller Grade selbst wieder positiv:

$$(+a)^n = +a^n .$$

*) Gerade so, wie $(a+b)$ eine Summe, $(a.b)$ ein Product genannt wurde rc. und wie überhaupt die Andeutung jeder unzweideutig bestimmten Verbindung zwischen Zahlen selbst wieder als eine Zahl angesehen werden darf.

Ist aber die **Wurzel negativ**, so sind die Potenzen der auf einander folgenden Grade, vom ersten an, abwechselnd negativ und positiv, mithin **negativ die Potenzen unpaaren** ($n=2r+1$), **positiv die Potenzen paaren Ranges** ($n=2r$):

$$(-a)^{2r+1} = -a^{2r+1};\ (-a)^{2r} = +a^{2r}.$$

In Absicht auf den Exponenten unterschieden, sind also **die Potenzen paaren Ranges positiv, ihre Wurzel mag positiv oder negativ sein; die Potenzen unpaaren Ranges dagegen einstimmig mit der Wurzel.**—

$$(+a)^{2r} = +a^{2r};\ (+a)^{2r+1} = +a^{2r+1};$$
$$(-a)^{2r} = +a^{2r};\ (-a)^{2r+1} = -a^{2r+1}.$$

Beweis. — B.

2. **Jede Potenz eines Productes ist ein Product aus den gleich hohen Potenzen seiner Factoren.**

$$(a\ .\ b)^n = a^n\ .\ b^n$$

Abzuleiten; — für Producte von mehr als zwei Factoren zu erweitern.— B. $(-2cx)^5$ &c.

Auch von dem umgekehrten Satze läßt sich zur Umbildung gegebener Formen Gebrauch machen. B.

3. **Jede Potenz eines Bruchs ist wieder ein Bruch, der sich aus den gleich hohen Potenzen des Zählers und Nenners als Zähler und Nenner zusammensetzt.**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Abzuleiten. — B. $\left(-\frac{3m}{2rv}\right)^6$, $\left(\frac{p}{9ab}\right)^r$ &c.

Satz und Formel können ebenfalls umgekehrt werden.

Auszuführen.

Mit steigendem Exponenten wird die Potenz eines echten Bruchs unaufhörlich kleiner, eines unechten, wenn er größer als 1 ist, unaufhörlich größer. Daß das Letztere auch von den Potenzen aller ganzen Zahlen außer 1 gilt, versteht sich von selbst. Von der Zahl 1 sind die Potenzen aller Grade wieder 1; $1^n = 1$.

Potenzen von Brüchen, die in kürzester Form gegeben sind, erscheinen wieder in kürzester Form.

Nur die Potenzen ganzer Zahlen oder unechter Brüche, die sich vollständig auch als solche ausdrücken lassen, sind daher selbst wieder ganze Zahlen oder der Zurückführung auf diese Form fähig.

Alle diese Sätze sind zu beweisen und an Beispielen deutlich zu machen.

4. Zwei= und mehrtheilige Wurzeln zu Potenzen höherer Grade zu erheben, ist man, ohne zu neuen Betrachtungsweisen seine Zuflucht nehmen zu wollen, auf den Weg der gemeinen Multiplication angewiesen. Auf diesem Wege sind die Regeln gefunden, nach welchen die zweite und dritte Potenz solcher Wurzeln aus den einzelnen Theilen derselben zusammenzusetzen sind, und durch wiederholte Multiplication der jedesmal erhaltenen Potenz mit der Wurzel lassen sich nach und nach die höheren Potenzen derselben entwickeln: aber zu einer allgemeinen Regel, nach welcher jedes beliebig zu bestimmende Glied der entwickelten Potenz eines willkürlich vorzuschreibenden Grades (n) aus den Theilen der Wurzel zu berechnen wäre, gelangt man dadurch nicht. Die Entwickelung einer solchen Regel bleibt daher der höheren Arithmetik überlassen, welche sich dazu in den Lehren einer verwandten Wissenschaft (der Combinationslehre) ein neues und bequemes Hülfsmittel verschafft. Auf dem Gebiete, über welches sich die Grundlehren der Arithmetik zu verbreiten haben, findet nirgends ein Bedürfniß der bezeichneten Erweiterung statt. Dagegen verzweigen sich die Anwendungen und Folgerungen derselben, welche ihr doch vorzüglich erst Werth verleihen, in so viele andere Untersuchungen, daß es natürlich erscheint, diese als neuen Theil der Wissenschaft abzugrenzen, wobei eine Trennung derselben von ihrem Ausgangspunkte eben so unnatürlich sein würde.

Das Gesetz, nach welchem jede beliebige Potenz einer zweitheiligen Wurzel, $(a + b)^n$, zu entwickeln ist, führt den Namen binomischer Lehrsatz, — das Gesetz der Potenzirung mehrtheiliger Wurzeln den Namen polynomischer Lehrsatz.

Die allmählige Entwickelung der fünf niedrigsten Potenzen einer zweitheiligen Wurzel — des sogenannten Binomiums $(a+b)$ — zeigt folgendes Schema:

$$
\begin{array}{rl}
(a+b)^1 = & (a+b) \\
& \times\ (a+b) \\
\hline
& a^2 + ab \\
& \quad + ab + b^2 \\
\hline
(a+b)^2 = & a^2 + 2ab + b^2 \\
& \times\ (a+b) \\
\hline
& a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
& \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\hline
(a+b)^3 = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
& \times\ (a+b) \\
\hline
& a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\
& \quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\
\hline
(a+b)^4 = & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
& \times\ (a+b) \\
\hline
& a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 \\
& \quad + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5 \\
\hline
(a+b)^5 = & a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{array}
$$

Im Verlaufe dieser Rechnung wird man von selbst auf mehre allgemeine Schlüsse geführt, z. B.

jede Potenz einer zweitheiligen Wurzel enthält ein Glied mehr, als ihr Exponent Einheiten;

das erste und letzte Glied sind immer Potenzen der einzelnen Theile der Wurzel vom Grade der verlangten Potenz;

in den zwischen sie fallenden Gliedern kommen gleichzeitig Potenzen beider Theile vor, dergestalt, daß die Potenzen des einen Theils stufenweise niedriger werden, während die Potenzen des anderen Theils sich gleichmäßig erhöhen, so daß immer die Exponenten der beiden mit einander verbundenen Potenzen zusammen den Grad der verlangten Potenz ausmachen;

jedes dieser Glieder hat außerdem einen eigenen Coefficienten, — der in Gliedern, welche gleich weit vom Anfange und Ende der regelmäßig geordneten Reihe abstehen, derselbe — und im ersten nach dem anfänglichen wie im vorletzten Gliede dem Grade der verlangten Potenz gleich ist;

Die Reihe der Coefficienten (Binomial-C.), welche den Gliedern der nächsthöheren Potenz angehören, läßt sich aus der vorhergehenden dadurch ableiten, daß man den ersten zum zweiten, den zweiten zum dritten, und so jeden vorhergehenden zum folgenden addirt, und als ersten und letzten 1 hinzufügt.*)

Zur vollständigen Darstellung des Gesetzes, nach welchem sich jede beliebige Potenz einer zweitheiligen Wurzel [$(a+b)^n$] entwickelt, fehlt also nur noch die Angabe, wie der Coefficient jedes besonderen Gliedes, unabhängig von allen früheren, bloß aus Zahlen, die zu seiner Bestimmung erforderlich sind, sich berechnen lasse.

Auch aus diesen, obschon noch mangelhaften Bestimmungen des genannten Gesetzes läßt sich der Beweis führen, daß die Potenzen einer Zahl, welche größer als 1 ist, mit steigendem Exponenten unaufhörlich wachsen, einer Zahl, welche kleiner als 1 ist, unaufhörlich abnehmen. (S. Nro. 3.)

Jenen Bestimmungen zufolge hebt nämlich der entwickelte Werth von $(a+b)^n$ mit den beiden Gliedern $a^n + na^{n-1}b$ an, denen sich desto mehr andere anschließen, je größer der Exponent ist. Jedenfalls ist also

$$(a+b)^n > a^n + na^{n-1}b$$

Eine Zahl, welche größer als 1 ist, läßt sich allgemein unter der Form $1+b$ darstellen. Also a mit 1 vertauscht, ist

$$(1+b)^n > 1 + nb.$$

Aber schon der Werth $1+nb$ läßt sich durch Steigerung des n über jede Grenze hinaus vergrößern (wie klein auch b angenommen sein mag), um so mehr der Werth von $(1+b)^n$.

Eine Zahl, welche kleiner als 1 ist, kann dagegen unter der

*) Auf die angegebene Art entsteht folgende Tabelle der sogenannten Binomialcoefficienten oder figurirten Zahlen:

Grad der Potenz.								
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
	2c.			2c.				

Die zweite Verticalcolumne enthält die Reihe der ganzen Zahlen in natürlicher Ordnung, die dritte die sogenannten Trigonalzahlen und die vierte die sogenannten Trigonal-Pyramidalzahlen.

Form $\frac{1}{1+b}$ verstanden werden. Da nun $\left(\frac{1}{1+b}\right)^n = \frac{1^n}{(1+b)^n}$ $= \frac{1}{(1+b)^n}$ ist, der Nenner dieses Bruchs aber mit wachsendem n unaufhörlich größer wird, während der Zähler desselben unverändert, $= 1$, bleibt; so muß der Werth des Bruches selbst sich immer mehr vermindern, je höher der Exponent n steigt.

Die vorstehenden Sätze können zum Theil näher begründet, zum Theil an Beispielen erläutert werden.

§. 70.

Allgemeine Sätze über die Wurzelausziehung.

Die Wurzelausziehung ist das Umgekehrte der Potenzirung. Beide Operationen, von gleichem Grade angenommen, heben sich gegenseitig auf:

$$\sqrt[n]{(a^n)} = (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Die Forderung, aus einer Zahl die Wurzel eines vorgeschriebenen Grades zu ziehen, setzt voraus, daß diese Zahl durch Erhebung einer anderen zur Potenz desselben Grades entstanden sei. Allein schon bei der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel zeigte es sich, daß keineswegs alle, vielmehr nur sehr wenige Zahlen in der That Quadrate oder Cuben anderer Zahlen sind. Und je höher der Grad der verlangten Wurzel steigt, desto seltener wird die Annahme zutreffen, daß die gegebene Zahl die gleich hohe Potenz einer anderen sei. In allen übrigen Fällen aber ist die Forderung, aus der gegebenen Zahl die Wurzel eines vorgeschriebenen Grades zu ziehen, streng genommen, unstatthaft, und die Andeutung derselben ($\sqrt[n]{a}$) ein Irrationalausdruck.

Daß Ausdrücke dieser Art, obwohl ihnen keine Zahl vollständig und genau entspricht, dennoch zur Größenbestimmung vollkommen tauglich sind, ist oben (§. 61. 5) schon ausführlicher erörtert. Die klar und bestimmt ausgesprochene Bedingung, welcher eine Zahl genügen müßte, wenn sie als Werth der darzustellenden Größe wirklich sollte angesehen werden können, giebt das Mittel in die Hand, von jeder versuchsweise angenommenen Zahl zu beurtheilen, ob sie zu groß oder zu klein sei. Wie es daher bei der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel geschah, so wird es überhaupt möglich sein, durch methodisch angestellte Versuche Zahlen zu finden, welche dem irrationalen Werthe einer Wurzel höheren Grades immer näher und näher rücken, so daß man gewiß sein kann, sie werde von dem wahren Werthe nicht mehr um einen beliebig klein zu wählenden Theil der Einheit verschieden sein. Für praktische Zwecke dürfen hinlänglich genäherte Werthe unbedenklich statt der wahren gesetzt werden, und sofern man die Bestimmung irrationaler Wurzeln durch Zahlen nicht aufgeben will, giebt es überall kein anderes Auskunftsmittel.

Um daher die Wurzel jeden Grades aus jeder beliebigen Zahl, $\sqrt[n]{a}$, unter der Beschränkung jedoch, daß beide, die gegebene Zahl und die Wurzel, als beziehungslose (absolute) Zahlen gedacht werden, selbst wieder als eine mögliche und bestimmte Zahl ansehen zu dürfen, ist statt der ursprünglichen eine umfassendere Erklärung an die Stelle zu setzen. Es soll nämlich hinfort Wurzel eines bestimmten Grades (n) aus einer beliebigen Zahl (a) die größte unter allen Zahlen eines vorgeschriebenen Nenners genannt werden, welche, zur Potenz des nämlichen Grades erhoben, eine Zahl hervorbringt, die in der gegebenen noch enthalten ist.— In diesem Sinne ist der Ausdruck $\sqrt[n]{a}$, sobald für a und n bestimmte Zahlen gesetzt werden, jederzeit einer eigentlichen Berechnung fähig, und wenn der Nenner der gesuchten Wurzel vorgeschrieben ist, als Andeutung einer einzigen, durchaus bestimmten Zahl zu nehmen, welche, wenn auch nur als genäherter Werth, mit anderen Zahlen jede beliebige Verbindung eingehen kann. Ist die gesuchte Wurzel rational, so treffen beide Erklärungen, die ursprüngliche und die hier gegebene, zusammen. Auf die letztere bezogen, sind die nachfolgenden Sätze in völliger Allgemeinheit gültig.

1. Eine Wurzel paaren Grades kann nur aus positiven Zahlen gezogen werden — vorausgesetzt, daß überall der gegebenen Zahl die Angabe, ob sie positiv oder negativ sein soll, beigefügt ist, — die Wurzel selbst ist zweideutig, d. h. sie kann ebensowohl positiv als negativ sein:

$$\sqrt[2r]{(+a)} = \mp \sqrt[2r]{a}.$$

Ausdrücke, welche eine Wurzel paaren Grades aus negativen Zahlen zu ziehen verlangen, $\sqrt[2r]{-a}$, gehören zu den Unmögliches fordernden oder imaginären.

Jede Wurzel unpaaren Ranges dagegen ist einstimmig mit der Zahl, aus welcher sie gezogen werden soll:

$$\sqrt[2r+1]{+a} = +\sqrt[2r+1]{a}; \quad \sqrt[2r+1]{-a} = -\sqrt[2r+1]{a}.$$

Beweis aus §. 69. 1.

2. Die Wurzel jeden Grades aus einem Producte ist ein Product aus den gleichnamigen Wurzeln seiner Factoren.

$$\sqrt[n]{(a.b)} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}.$$

Erweiterung der Formel für Producte von mehr als zwei Factoren. — B.

Auch im umgekehrten Sinne läßt sich die Formel zur Umgestaltung gegebener Ausdrücke gebrauchen.

3. Die Wurzel jeden Grades aus einem Bruche ist ein Bruch, der die gleichnamigen Wurzeln des Zählers und Nenners zum Zähler und Nenner hat.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Auch von dieser Formel läßt sich im umgekehrten Sinne Gebrauch machen.

Ist der gegebene Bruch in seine kürzeste Form gebracht, so hängt die Möglichkeit, aus ihm die Wurzel eines vorgeschriebenen Grades vollständig auszuziehen, davon ab, ob sich dieselbe sowohl vom Zähler als vom Nenner genau angeben läßt. Bei der Untersuchung, aus welchen Zahlen sich die Wurzel eines vorgeschriebenen Grades wirklich oder im eigentlichen Sinne ziehen lasse, brauchen daher nur die ganzen Zahlen berücksichtigt zu werden.

Hiernach ist unter Zuziehung des §. 69. 3 abgeleiteten Satzes, daß nur die Potenzen ganzer Zahlen ꝛc. selbst wieder ganze Zahlen werden, die obige Behauptung zu rechtfertigen, daß die Wurzeln höherer Grade desto seltener rational sein werden, je höher der Wurzelgrad steigt.

Indessen kann immer eine der beiden Zahlen, aus welchen sich die Wurzel eines Bruchs zusammensetzt, entweder der Zähler oder der Nenner, als vollständige, genaue Zahl erhalten werden, wenn man die Aufgabe den nachstehenden Andeutungen gemäß verändert:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \sqrt[n]{\left(\frac{a\,.\,a^{n-1}}{b\,.\,a^{n-1}}\right)} = \frac{\sqrt[n]{(a^n)}}{\sqrt[n]{(b\,.\,a^{n-1})}} = \frac{a}{\sqrt[n]{(b\,.\,a^{n-1})}};$$

$$= \sqrt[n]{\left(\frac{a\,.\,b^{n-1}}{b\,.\,b^{n-1}}\right)} = \frac{\sqrt[n]{(a\,.\,b^{n-1})}}{\sqrt[n]{(b^n)}} = \frac{\sqrt[n]{(a\,.\,b^{n-1})}}{b}.$$

Das in diesen Zeichen angedeutete Verfahren ist in Worten auszudrücken und zu begründen.

Auch ist zu zeigen, daß weder $\sqrt[n]{(a\,.\,b^{n-1})}$ noch $\sqrt[n]{(b\,.\,a^{n-1})}$ rational werden kann, wenn nicht zugleich $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$ rational sind. (Man stelle zu dem Ende a und b als Producte von Primzahlen dar.)

Die Wurzel eines echten Bruchs von beliebigem Grade ist ein größerer echter, eines unechten ein kleinerer unechter Bruch, und die eine wie die andere, also überhaupt die Wurzel jeder beliebigen Zahl rückt um so näher an eins, je höher ihr Grad steigt.

Zu beweisen.

4. Für die Ausziehung der Wurzel höheren Grades aus mehrtheiligen Zahlen läßt sich natürlich kein allgemeines Verfahren ableiten, so lange nicht die Erhebung solcher Zahlen zur Potenz jedes beliebigen Grades auf allgemeine Regeln gebracht ist.

Indessen auch schon die unvollkommenen Bestimmungen hierüber (§. 69. 4) geben zu manchen bemerkenswerthen Folgerungen Anlaß. Hier nur eine derselben, welche einen neuen Beweis des eben aufgestellten Satzes über das Größenverhältniß zwischen einer gegebenen Zahl und ihrer Wurzel höheren Grades liefert.

Es wurde gezeigt, daß

$$(1+b)^n > 1 + nb \text{ ist;}$$

folglich wird $$\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n > 1+\beta,$$

und $$1+\frac{\beta}{n} > \sqrt[n]{(1+\beta)}.$$

Nun läßt sich aber $\frac{\beta}{n}$ durch Steigerung des n unter jede willkürlich angenommene Kleinheitsgrenze herabdrücken, mithin schon $1+\frac{\beta}{n}$ so nahe an 1 bringen, als man will, — um so mehr $\sqrt[n]{(1+\beta)}$, d. h. die Wurzel nten Grades aus jeder beliebigen Zahl, welche größer als 1 ist, da sie noch kleiner sein soll als $1+\frac{\beta}{n}$.

Daraus folgt weiter, daß von der anderen Seite die Wurzel höheren Grades aus jeder Zahl, welche kleiner als 1 ist,

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+\beta}\right)} = \frac{1}{\sqrt[n]{(1+\beta)}},$$

durch Erhöhung des Wurzelgrades ebenfalls dem Werthe 1 über jede Grenze hinaus genähert werden könne, indem dadurch der Zähler und Nenner derselben (der letztere als größere Zahl) dem Verhältniß der Gleichheit immer näher gebracht werden.

§. 71.

Das Rechnen mit Potenzen.

Unter den im Vorhergehenden festgesetzten Beschränkungen sind die Potenz- und die Wurzelform (a^n und $\sqrt[n]{a}$) unter die zusammengesetzten Zahlformen von bestimmter Geltung aufzunehmen.

Jene Beschränkungen noch einmal zusammenzustellen, und zu erläutern, was unter zusammengesetzten Zahlformen von bestimmter Geltung zu verstehen ist.

Unter gleichem Vorbehalt dürfen auch die Resultate aller Rechnungen, in welche Zahlen jener Form verflochten werden, selbst wieder als unzweifelhaft bestimmte Zahlen angesehen werden. Freilich bleibt das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln, wie alles Rechnen mit Zahlen von zusammengesetzter Form, auf bloße Andeutungen beschränkt, so lange diese Form nicht aufgegeben werden kann (was namentlich der Fall ist, wenn die durch sie in Verbindung gebrachten Zahlen unbestimmt gelassen und bloß durch allgemeine Zeichen angedeutet sind). In wie weit jedoch die Eigenthümlichkeit dieser Zahlformen Entwickelungen der Resultate mit ihnen vorzunehmender Rechnungen oder Abkürzungen und Zusammenziehungen derselben gestattet, verdient noch besonders nachgewiesen zu werden.

Bei der Addition und Subtraction sind Potenzen und Wurzeln wie die durch einfache Zeichen dargestellten Zahlen zu behandeln. Etwa als gemeinschaftliche Factoren mehrer Glieder abzusondernde Potenzen oder Wurzeln müssen vollständig übereinstimmen.

Was gehört zu dieser Uebereinstimmung. — B.

Was die übrigen Rechnungsarten betrifft, so ergeben sich zunächst für das Rechnen mit Potenzen folgende Bestimmungen.

1. Bei der Multiplication ist nur dann eine Zusammenziehung des Resultats möglich, wenn die Factoren Potenzen der nämlichen Wurzel sind. In diesem Falle läßt sich das Product als eine Potenz derselben Wurzel darstellen, deren Exponent die Summe der Exponenten seiner Factoren ist;

$$\text{z. B.}\quad a^4 \,.\, a^3 = a^{4+3} = a^7;$$

$$\text{allgemein:}\quad a^n \,.\, a^r = a^{n+r}$$

Ableitung des Satzes und Erweiterung der Formel auf Producte von mehr als zwei Factoren.

$$2a^2b^3c \times 9a^5b^3c^4; \quad \frac{3c^4d^3}{8x^9} \times \frac{5ac^6}{x^2z^7};$$

$$a^m b^n c^5 \times \frac{5a^r\, b\, c^p}{6d^q} \times \frac{c^v}{5d^q} \text{ u. a. B.}$$

Umgekehrt läßt sich auch eine Potenz höheren Grades in ein Product von Potenzen der nämlichen Wurzel auflösen, deren Exponenten die einzelnen Theile des gegebenen sind.

B.

2. Auch bei der Division hängt die Möglichkeit einer Ent-

wickelung des Resultats von einer gleich beschränkten Voraussetzung ab. Nur wenn eine Potenz durch eine andere der nämlichen Wurzel dividirt werden soll, ist der Quotient in abgekürzter Form darzustellen, — und zwar als eine Potenz derselben Wurzel, deren Grad der Unterschied zwischen dem Exponenten des Dividends und dem des Divisors ist, wenn jener der größere, — als ein Bruch dagegen, dessen Zähler 1, dessen Nenner die beschriebene Potenz, wenn der Exponent des Divisors der größere ist; — und sind beide Exponenten, mithin Dividend und Divisor selbst, einander gleich, so ist der Quotient bekanntlich $= 1$.

Es ist z. B. 1) $a^5 : a^3 = \frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$,

allgemein, wenn $n > r$ angenommen wird:

$$a^n : a^r = \frac{a^n}{a^r} = a^{n-r};$$

ferner 2) $a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2}$,

allgemein, wenn $r > n$ angenommen wird:

$$a^n : a^r = \frac{a^n}{a^r} = \frac{1}{a^{r-n}},$$

und endlich 3) $a^n : a^n = 1$.

Ableitung des Satzes. — $6a^5b^2c : 3a^2b^2c^3$; $\frac{a^7b^8}{4c^8d^4e} \times \frac{20d^5}{a^5b^9}$; $\left(11a^2b^9 - \frac{10b^3cx}{3a^2m^5}\right) : \frac{5a^4bc}{2m}$ u. a. B.

Wollte man bei der Annahme, daß der Dividend und der Divisor Potenzen der nämlichen Wurzel sind, allgemein, und ohne den Unterschied zu beachten, ob der Exponent des einen größer, kleiner oder eben so groß als der des andern ist, die Regel geben, daß man den Exponenten des Divisors von dem des Dividends subtrahiren solle, um eine Potenz der nämlichen Wurzel, deren Grad die gefundene Differenz ist, zum Quotienten zu machen; so würde dieser, falls der Exponent des Divisors größer ist als der des Dividends, eine Potenz mit negativem Exponenten, und wenn beide einander gleich sind, eine Potenz vom Range 0 werden.

So würde z. B.

$$a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2} \qquad \left[= \frac{1}{a^2}\right]$$

und allgemein, wenn $r > n$ angenommen wird:

$$a^n : a^r = a^{n-r} = a^{-(r-n)} \quad \left[= \frac{1}{a^{r-n}}\right],$$

ferner $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 \quad [= 1]$ sein.

Da inzwischen der Potenzbegriff, wie er bisher gefaßt und angewandt ist, nur absolute ganze Zahlen als Exponenten zuläßt, so dürfen Zahlzeichen, welche zwar die Form von Potenzen annehmen, aber negative Zahlen oder 0 an die Stelle des Exponenten setzen, nicht eher unter die Potenzformen aufgenommen werden, als bis der Begriff der Potenz die angemessene Erweiterung erfahren hat. Was übrigens solche Zahlzeichen bedeuten müssten, würde die gewöhnliche Lösung der Aufgaben, aus welchen sie entspringen, darlegen.

3. Soll eine Potenz nochmals zur Potenz eines vorgeschriebenen Grades erhoben werden, so wird das Resultat eine Potenz der nämlichen Wurzel, deren Exponent das Product der gegebenen ist;

$$\text{z. B.} \quad (a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12};$$

$$\text{allgemein:} \quad (a^n)^r = a^{nr}.$$

Erweiterung des Satzes. — Abzuleiten (aus 1). — B.

Vermöge dieses Satzes lassen sich Potenzirungen, deren Grade aus kleineren Factoren zusammengesetzte Zahlen sind, auf solche zurückbringen, deren Grade diese Factoren sind. Man erhebt zuerst die Wurzel zur Potenz eines Grades, welcher mit dem einen Factor, die erhaltene Potenz wieder zur Potenz eines Grades, welcher mit dem zweiten Factor übereinstimmt u. s. f. — Nur diejenigen Potenzirungen also, deren Grade Primzahlen sind, würden ursprünglicher Regeln bedürfen.

Erläuterung an Beispielen.

Die Ordnung, in welcher zwei und mehre auf einander folgende Potenzirungen vollzogen werden, ist gleichgültig für das Resultat.

$$(a^n)^r \; [= a^{nr}] = (a^r)^n \, .$$

4. **Aus einer Potenz die Wurzel zu ziehen, kann man in denjenigen Fällen, wenn der Exponent der Potenz ein Vielfaches des Wurzelgrades ist, jenen durch diesen dividiren und den Quotienten zum Exponenten einer neuen Potenz der nämlichen Wurzel machen;**

$$\text{z. B.} \quad \sqrt[4]{a^{12}} = a^{12:4} = a^3 \; ;$$

$$\text{allgemein:} \quad \sqrt[r]{a^{nr}} = a^{nr:r} = a^n \, .$$

$$\text{B.} \; - \quad \sqrt{(a^4 \cdot b^6)}; \quad \sqrt[m]{\left(\frac{a^m}{c^{3m} \, . \, d^{mx}}\right)} \; \text{u. a.}$$

Dieses Verfahren ergiebt sich durch gerade Umkehrung des vorhergehenden. Wollte man dasselbe ohne die angezeigte Einschränkung für die Ausziehung der Wurzel jeden Grades aus jeder beliebigen Potenz gelten lassen; so würde das Resultat allemal, wenn die verlangte Division nicht aufgeht, zwar noch die äußere Gestalt einer Potenz annehmen, aber zum Exponenten eine gebrochene Zahl bekommen. Aus $\sqrt[3]{a^2}$ würde z. B. $a^{\frac{2}{3}}$ und aus $\sqrt[r]{a^n}$ die Form $a^{\frac{n}{r}}$ entstehen. Formen dieser Art dürfen jedoch eben so wenig wie diejenigen, in welchen negative Zahlen an die Stelle des Exponenten treten, (s. Nro. 2) als wirkliche Potenzformen zugelassen werden, bevor nicht der Potenzbegriff auf entsprechende Art erweitert worden ist.

Geht nun die Division des Exponenten der Potenz durch den Grad der verlangten Wurzel nicht auf, so ist man auf die bloße Andeutung der Operation beschränkt.

Uebrigens darf man **Potenzirung und Wurzelausziehung in beliebiger Ordnung auf einander folgen lassen:**

$$\sqrt[r]{(a^n)} = (\sqrt[r]{a})^n = \sqrt[r]{a^n} \; ;$$

denn es ist $\sqrt[r]{(a^n)} = \sqrt[r]{(a \, . \overset{n \text{ mal}}{a \ldots .} \, a)} = \overset{n \text{ mal}}{\sqrt[r]{a} \, . \sqrt[r]{a} \ldots \sqrt[r]{a}} = (\sqrt[r]{a})^n.$

Ausdrücke, welche als letzte Operation eine Wurzelausziehung vorschreiben, pflegt man Wurzelgrößen zu nennen. Ausdrücke, welche zugleich eine Potenzirung und Wurzelausziehung fordern, wie $\sqrt[r]{a^n}$, können also mit gleichem Rechte als Potenzen wie als Wurzelgrößen betrachtet werden.

In wiefern lassen sich auch Wurzelgrößen von der Form $\sqrt[r]{a}$ als Potenzen ansehen?

§. 72.

Das Rechnen mit Wurzelgrößen.

Die Eigenschaft der Wurzelgrößen, nach Belieben auch als Potenzen angesehen werden zu können, macht es möglich, die Vorschriften für das Rechnen mit diesen auch auf jene anzuwenden. Es bleibt also nur die Frage zu erledigen übrig, ob nicht die Form der Wurzelgrößen noch eigenthümliche Rechnungsvortheile darbietet, und eine ausgedehntere Anwendung der vorigen Regeln erlaubt, als unter den engen Voraussetzungen, auf welche die unmittelbare Anwendung derselben sich beschränken müßte.

Wie müßten nämlich Wurzelgrößen beschaffen sein, um ohne Weiteres die Regeln Nro. 1 und 2 des vorigen §. auf sie anwenden zu können? — B.

1. Zuerst ist aber klar, daß jede Potenz auch als Wurzelgröße, und zwar von beliebigem Grade, ausgedrückt werden kann. Es ist nämlich allgemein

$$a^n = \sqrt[r]{a^{nr}}.$$

Die in dieser Formel dargelegte Vorschrift für die Verwandlung einer Potenz in eine Wurzelgröße von beliebigem Grade ist in Worten auszudrücken, zu begründen und auf Beispiele anzuwenden.

Sollen demnach Potenzen und Wurzelgrößen mit einander multiplicirt, oder eine durch die andere dividirt werden; so lassen sich die Potenzen auch erst in Wurzelgrößen vom Grade der gegebenen verwandeln, und alsdann die Resultate nach den vorhin (Nro. 1 und 2 des vorigen §.) gegebenen Vorschriften zusammenziehen, wenn nur beide Zahlformen aus der nämlichen Zahl gebildet waren.

An Beispielen zu zeigen, und auch durch allgemeine Formeln darzustellen.

2. Die Möglichkeit einer Formvereinfachung, von welcher bei dem Rechnen mit Potenzen noch nicht die Rede sein konnte, bietet sich ferner bei der Aufgabe dar, aus einer Wurzelgröße nochmals die Wurzel eines vorgeschriebenen Grades zu ziehen. Das Resultat kann jederzeit als neue Wurzelgröße, deren Grad das Product der gegebenen Wurzelgrade ist, (mit Beibehaltung der übrigen Bestimmungen) dargestellt werden.

$$\sqrt[m]{(\sqrt[r]{a^n})} = \sqrt[mr]{(a^n)}.$$

Beweis. (S. Nro. 3 des vorigen §.) — Erweiterung der Formel. — B.

Jede Wurzelausziehung, deren Grad eine zusammengesetzte Zahl (§. 13. 2) ist, kann folglich auch durch mehre nach einander zu verrichtende, deren Grade die Factoren des gegebenen sind, vertreten werden, — wobei die Ordnung, in welcher diese auf einander folgen, für das Resultat gleichgültig ist.

Erläuterung an Beispielen.

Wurzelausziehungen können daher, wie Potenzirungen, wenn ihre Grade zusammengesetzte Zahlen sind, auf solche zurückgebracht werden, deren Grade Primzahlen sind, so daß nur diese ursprünglicher Regeln bedürfen würden. — B.

3. Da nun die Multiplication des Grades einer Wurzelgröße mit einer ganzen Zahl einer Wurzelausziehung, die Multiplication des Exponenten einer Potenz mit einer solchen Zahl einer Potenzirung, deren Grad durch diese Zahl bestimmt wird, gleich kommt, beide Operationen aber, dem Grade nach gleich, an derselben Zahl verrichtet, einander aufheben; so ändern Ausdrücke, welche die Form der Wurzelgröße und Potenz in sich vereinigen, ihren Werth nicht, wenn der Wurzelgrad und der Exponent der Potenz gleichzeitig mit derselben ganzen Zahl multiplicirt werden.

$$\sqrt[r]{a^n} = \sqrt[mr]{a^{mn}} \quad [= \sqrt[m]{(\sqrt[r]{a^n})^m}.]$$

B.

Umgekehrt dürfen natürlich auch Wurzelgrad und Potenzexponent solcher Zahlformen, unbeschadet des Werthes derselben, durch die nämliche ganze Zahl dividirt werden, — vorausgesetzt, daß die Division beidemal aufgeht. — B.

4. Den zuletzt genannten Sätzen zufolge sind Wurzelgrößen der mannigfaltigsten Formveränderungen fähig. Man benutzt diesen Umstand hauptsächlich, um Ausdrücke, welche Wurzelausziehungen verschiedener Grade fordern, so umzuformen, daß diese Grade gleich werden. Das dabei einzuschlagende Verfahren entspricht vollkommen demjenigen, durch welches Brüche auf gleiche Benennung gebracht wurden (§. 23. 2 und 3). Die Wurzelgrade werden wie die Nenner, die Potenzexponenten wie die Zähler der gleichnamig zu machenden Brüche behandelt.

So verwandeln sich $\sqrt[r]{(a^n)}$ und $\sqrt[m]{(b^q)}$

in $\sqrt[mr]{(a^{mn})}$ und $\sqrt[mr]{(b^{qr})}$.

Wörtlicher Ausdruck des Verfahrens; — auch wenn mehr als zwei Wurzelgrößen in solche mit gleichem Wurzelgrade verwandelt werden sollen; — mögliche Abkürzungen des Verfahrens; — B.

Bei der Multiplication und Division mit Wurzelgrößen bringen offenbar die genannten Umformungen den Vortheil, daß auch dann, wenn die Grade der verlangten Wurzelausziehungen ursprünglich nicht übereinstimmen, die Resultate dennoch nach den Regeln für die Multiplication und Division mit Potenzen der nämlichen Wurzel zusammengezogen werden können, wenn nur die Zahl, an welcher die angedeuteten Potenzirungen und Wurzelausziehungen verrichtet werden sollen, dieselbe ist.

So ist:

$$\sqrt[r]{a^n} \,.\, \sqrt[m]{a^q} = \sqrt[mr]{a^{mn}} \,.\, \sqrt[mr]{a^{qr}} = (\sqrt[mr]{a})^{mn} \,.\, (\sqrt[mr]{a})^{qr} = (\sqrt[mr]{a})^{mn+qr},$$

$$\text{oder} \quad = \sqrt[mr]{(a^{mn} \,.\, a^{qr})} = \sqrt[mr]{(a^{mn+qr})};$$

ferner:

$$\sqrt[r]{a^n} : \sqrt[m]{a^q} = \sqrt[mr]{a^{mn}} : \sqrt[mr]{a^{qr}} = (\sqrt[mr]{a})^{mn} : (\sqrt[mr]{a})^{qr} \text{ od.} = \sqrt[mr]{(a^{mn} : a^{qr})},$$

$$\text{wenn } mn > qr \text{ ist,} \quad = (\sqrt[mr]{a})^{mn-qr} \quad , = \sqrt[mr]{(a^{mn-qr})},$$

$$\text{und wenn } mn < qr \text{ ist,} \quad = \frac{1}{(\sqrt[mr]{a})^{qr-mn}} \quad , = \frac{1}{\sqrt[mr]{(a^{qr-mn})}}.$$

Wie unterscheiden sich die beiden durch das Wörtchen »oder« aus einander gehaltenen Entwickelungen? — Auf welchen Sätzen beruht die eine und die andere? — und nach welchem früheren Satze sind die letzten Resultate wieder gleich zu setzen? — Beispiele, in welchen statt r, n, m und q bestimmte Zahlen gesetzt sind.

Anmerk. Als besondere Regel könnte man sich auch noch folgende merken: um eine Wurzelgröße zur Potenz eines vorgeschriebenen Grades zu erheben, kann man mit diesem in den Wurzelgrad dividiren, falls die Division aufgeht. Die dadurch unmittelbar herbeizuführende Abkürzung des Resultats kann aber auch mit einem geringen Umwege nach den vorstehenden Sätzen bewirkt werden.

Wie? — Ableitung der Regel aus Nro. 2 dieses §. — B.

Dreizehnter Abschnitt.

Allgemeiner Begriff der Potenz und allgemeine Potenzenrechnung.

---

§. 73.

Erweiterung des Potenzbegriffs.

Von den Regeln für das Rechnen mit Potenzen entbehren noch zwei, die eine für die Division einer Potenz durch eine andere von gleicher Wurzel (§. 71. 2), die andere für die Wurzelausziehung aus einer Potenz (§. 71. 4), desjenigen Grades von Allgemeinheit, welcher erst den wissenschaftlichen Werth und die wahre Brauchbarkeit einer Regel begründet.

1. Für die Division einer Potenz durch eine andere von gleicher Wurzel würde die gerade Umkehrung der Regel für die Multiplication solcher Potenzen die Vorschrift ergeben haben: den Exponenten des Divisors von dem des Dividends zu subtrahiren, um den Rest zum Exponenten einer neuen Potenz der nämlichen Wurzel zu machen. Diese Vorschrift durfte indessen nicht in solcher Allgemeinheit, sondern nur für die Voraussetzung, daß der Exponent des Dividends größer sei als der des Divisors, aufgestellt werden, so lange, dem ursprünglichen Begriffe der Potenz getreu, nur beziehungslose ganze Zahlen als Exponenten zugelassen werden sollten.

Das Streben der Arithmetik muß aber darauf gerichtet sein, ihren Methoden den größtmöglichen Grad von Allgemeinheit zu geben, Aufgaben, welche im Wesentlichen übereinstimmen, auch derselben Regel zu unterwerfen, ohne durch das bloß zufällige Größenverhältniß der mit einander zu verknüpfenden Zahlen gebunden zu sein. Gleichwie daher bei der Entstehung des Zahlbegriffs nur die Größe der darzustellenden Dinge berücksichtigt wurde, und erst in Folge des Bedürfnisses, jede beliebige Rechnung, welche bloß die Grundoperationen fordert, allgemein ausdrücken und mit Zahlen von allen möglichen Verhältnissen der Größe ausführen zu können, die Forderung, auch größere Zahlen von kleineren zu subtrahiren, auf die Idee einer Zählung im entgegengesetzten Sinne und die Feststellung des Begriffs einstimmiger und widerstreitender, positiver und negativer Zahlen, mithin auf die Erweiterung des Begriffs der Zahl durch die Aufnahme der Bestimmung, in welchem Sinne sie zu zählen sei, hinleitete: so ist auch im vorliegenden Falle, um die Division einer Potenz durch eine andere der nämlichen Wurzel unter allen Voraussetzungen einer und derselben Regel unterwerfen zu können, der Begriff der Potenz noch erst zu erweitern, dergestalt, daß er auch solche Zahlformen umfaßt, welche negative Zahlen oder 0 an die Stelle des Exponenten setzen.

Würde nämlich das bereits mehrmals erwähnte Verfahren der Division einer Potenz durch eine andere der nämlichen Wurzel von der Einschränkung befreit, daß der Exponent des Dividends größer sein müsse, als der des Divisors; so erschiene jedesmal, wenn dieser größer wäre als jener, der Quotient als eine Potenz mit negativem Exponenten. So z. B. würde $a^3 : a^7 = a^{3-7} = a^{-4}$ zu setzen sein. Man würde aber das Resultat auch in der Form $\frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}$ haben erhalten können; und allgemein, wenn $m > n$ angenommen, und $m - n = r$ gesetzt wird, würde

$$a^n : a^m = a^{n-m} = a^{-(m-n)} = a^{-r}$$

$$\text{oder} \quad = \frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}} = \frac{1}{a^r} \text{ sein.}$$

Was demnach eine Potenz mit negativem Exponenten bedeuten müßte, leuchtet ein: einen Bruch, dessen Zähler 1, dessen Nenner dieselbe Zahlform mit Vertau-

schung des negativen gegen einen gleich großen positiven Exponenten ist; $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

Es kommt also nur noch darauf an, den ursprünglichen Begriff der Potenz so zu erweitern, daß er auch diese Erklärung unter sich begreift. Nun war aber die Bestimmung des Exponenten, zu zählen, wie oft die Wurzel sich als Factor im Producte, der Potenz, wiederholt, — ein Zählen von Factoren. Für jedes Eins des Exponenten ist die Wurzel einmal als Factor zu setzen, — umgekehrt also mit jedem Eins des Exponenten auch ein solcher Factor wieder aufzuheben oder zurückzuzählen. Eins zurückzählen oder im negativen (dem anfänglichen entgegengesetzten) Sinne zuzählen, ist einerlei. Einen Factor aufheben, heißt durch ihn dividiren, und Division durch eine Zahl (a) kann auch als Multiplication mit einem Bruche, welcher sie zum Nenner und 1 zum Zähler hat, $\left(\frac{1}{a}\right)$, gedacht werden. Wie dem positiven das negative Eins als Theil oder im Sinne der Addition, so widerstreitet einer Zahl ein Bruch mit dem Zähler 1, dessen Nenner sie ist, ihr umgekehrter Werth, als Factor oder im Sinne der Multiplication. Jene zu einer dritten Zahl addirt, diese mit einer dritten Zahl multiplicirt, heben sich gegenseitig auf.

$$\left(b + 1 - 1 = b, \text{ und } b \,.\, a \,.\, \frac{1}{a} = b\right).$$

Es folgt also aus dem ursprünglichen Potenzbegriffe, daß für jedes zurückgezählte, negative Eins des Exponenten der umgekehrte Werth der Wurzel einmal als Factor, oder, wie man ihn füglich auch nennen kann, ein der Wurzel widerstreitender Factor zu setzen ist. So lange nun ein positiver Exponent vorhanden ist, von welchem zurückgezählt wird, verschwindet jedes negative Eins gegen ein positives, und dem entsprechend durch die Vereinigung mit einem der ursprünglichen jeder denselben widerstreitende Factor. Wenn aber das dem anfänglichen entgegengerichtete Zählen im Exponenten den Anfangspunct der Zählung, 0, überschreitet und die Reihe der negativen Zahlen erzeugt; so tritt, für jedes negative Eins des Exponenten nach wie vor ein der Wurzel widerstreitender Factor gesetzt, dieser auch wirklich hervor und wiederholt sich so oft, als der negative Exponent Einheiten zählt.

$$a^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}.$$

Man gestatte also nur dem Exponenten, welcher Anfangs bloß zu zählen bestimmt war, wie oft die Wurzel als Factor zu nehmen sei, auch die Andeutung, in welchem Sinne dies geschehen solle, ob im anfänglichen (positiven) oder dem entgegengesetzten (negativen), — und die Bedeutung, welche dem Obigen zufolge einer Potenz mit negativem Exponenten unterzulegen ist, ergiebt sich ungezwungen aus der Beziehung, in welche Grad und Wurzel der Potenz zu einander gesetzt sind.

Anmerk. Anstatt, wie eben, jede beliebige Zahl durch a, mithin die ihr als Factor widerstreitende durch $\frac{1}{a}$ zu bezeichnen, hätte man jene auch in Form eines Bruchs, $\frac{a}{c}$, darstellen können, und dann den umgekehrten Werth, $\frac{c}{a}$, als den ihr widerstreitenden Factor $\left[b \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}\right] = b$, folglich $\left(\frac{a}{c}\right)^{-r} = \left(\frac{c}{a}\right)^r$ erhalten. — Beide Arten der Bezeichnung sind indessen leicht auf einander zurückzuführen oder aus einander herzuleiten.

Wie?

2. Auf der Grenze zwischen den Potenzen mit positiven und negativen Exponenten erscheint bei dem Uebergange von den einen zu den anderen eine Potenz mit dem Exponenten 0, a^0. Diese Zahlform kann nur bedeuten, daß a gar nicht als Factor zu setzen ist, oder als solcher verschwindet. Die einzige Zahl aber, welche als Factor verschwindet, oder, mit einer anderen Zahl multiplicirt (wie 0 zu einer anderen Zahl addirt), dieselbe unverändert läßt, ist 1; ($b \cdot 1 = b$). Man hat also $a^0 = 1$ zu setzen, wie es auch der Fall war, wenn dieses Zeichen als Resultat der Division einer Potenz durch eine andere ihr völlig gleiche abgeleitet wurde. (S. §. 71. 2)

3. Die zweite Regel der Potenzenrechnung, welche einer Beschränkung unterworfen werden mußte, weil der ursprüngliche Begriff der Potenz nur absolute ganze Zahlen als Exponenten zuließ, war die der Wurzelausziehung (§. 71. 4). Die Division des Exponenten der Potenz durch den Wurzelgrad wurde deßhalb zur Lösung dieser Aufgabe nur dann gestattet, wenn sie aufging. Um sie immer zulassen zu dürfen, hätte man auch Zahlformen, welche Brüche an die Stelle des Exponenten setzen, unter die Potenzen aufzunehmen. Denn jedesmal, wenn die genannte Dvision nicht aufgeht würde das Resultat in dieser Form erscheinen: $\sqrt[r]{a^n} = a^{\frac{n}{r}}$. Was demnach eine Potenz mit gebrochenem Exponenten bedeuten müßte, ist klar. Auf dieselbe Bedeutung führt aber auch die folgerechte Erweiterung der Form und des Begriffs der Potenz.

Eine ganze Zahl giebt nämlich an, wie oft Etwas, und zwar in ihrer ursprünglichen Bedeutung, wie oft dasselbe als Theil zu wiederholen ist, — als Exponent dagegen mit einer anderen Zahl verbunden, wie oft dieselbe sich als Factor wiederholen soll. Statt ein Vielfaches von Theilen läßt man also die ganze Zahl, wenn sie als Exponent gesetzt ist, ein Vielfaches von Factoren andeuten. Der Vorstellung des Vielfachen ist aber die eines aliquoten Theils entgegengesetzt, so lange jenes, wie es anfänglich geschah, als Inbegriff lauter gleicher Theile gedacht wird. Der Vervielfachung eines Factors ist auf gleiche Weise die Zerlegung einer Zahl in lauter einander gleiche Factoren entgegengesetzt. Daß Etwas in eine bestimmte Menge gleicher Theile zerlegt werden soll, drückt der Nenner eines Bruchs aus, dessen Zähler überdieß bezeichnet, wie oft ein solcher Theil zu wiederholen ist. Wird nun der Bruch als Exponent gesetzt, so sind natürlich beide Andeutungen in demselben Sinne auszulegen, wie die Vorschrift der ganzen Zahl, wenn sie als Exponent gebraucht wurde. Um also der ersten Vorschrift zu genügen, muß die Wurzel in so viele gleiche Factoren zerlegt werden, als der Nenner angiebt, und der zweiten Forderung zu entsprechen, ein dadurch erhaltener Factor so viel mal genommen werden als der Zähler verlangt. Eine **Potenz mit gebrochenem Exponenten** muß hiernach **eine Zahl** bedeuten, **welche aus einer gegebenen dadurch entsteht, daß man aus ihr die sovielte Wurzel auszieht, als der Nenner des Exponenten angiebt, und diese zur Potenz des Grades erhebt, welchen der Zähler desselben bestimmt**; z. B.

$$64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2} = 16; \quad 32^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{32^3} = 8;$$

$$\text{allgemein:} \quad a^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{a^n}.$$

Andere B. — $125^{\frac{1}{3}} = ?$ 2c.

Potenzen mit gebrochenen Exponenten sind also nur andere Zeichen für Wurzelgrößen, mithin die Gesetze und Beschränkungen, denen die Wurzelausziehung unterworfen war, auch auf ihre Bildung zu übertragen, und die Veränderungen, deren die Form eines Bruchs unbeschadet seines Werthes fähig ist, auch bei den als Exponenten gebrauchten Brüchen zulässig. Gesetzt daher, der Exponent sei in kürzester Form ausgedrückt, so muß allemal, wenn die Wurzel, deren Grad der Nenner ist, aus der gegebenen Zahl nicht vollständig ausgezogen werden kann, ein bloß genäherter Werth statt des irrationalen zugelassen werden. Ist ferner der Nenner eine paare und die Wurzel eine negative Zahl, so ist die Potenz unmöglich, ein imaginärer Ausdruck, — und wenn die Wurzel positiv ist, zweideutig, positiv oder negativ.

Nach welchen früheren Sätzen darf der als Exponent einer Potenz gesetzte Bruch erweitert oder abgekürzt, mithin auch, wenn er nicht in seiner kürzesten Form gegeben ist, auf diese gebracht werden? — Weßhalb ist die Voraussetzung, daß dieses geschehen sei, den nachfolgenden Bestimmungen zum Grunde gelegt? — und worauf beruhen diese? —

4. Um alle möglichen Arten von Zahlen als Exponenten in die Potenzform einführen zu können, würde jetzt nur noch anzugeben sein, was für eine Bedeutung dieser Zahlform unterzulegen wäre, wenn in derselben ein **negativer Bruch** als Exponent gesetzt würde. Die Erklärung ergiebt sich aber leicht aus den vorhergehenden. Wie die ganze Einheit, so kann auch jeder beliebige aliquote Theil derselben nicht nur im anfänglichen, positiven, sondern auch in dem gerade entgegengesetzten, negativen Sinne gezählt werden. Der Theilung in die vom Nenner des Exponenten bezeichnete Menge gleicher Theile entspricht die Zerlegung des Grundfactors in eben so viele gleiche Factoren, — der Umkehrung, durch welche der dem erhaltenen Theile widerstreitende gewonnen wird, die Umkehrung des Werthes der erhaltenen Wurzel in denjenigen, welcher ihr als Factor widerstreitet, — und der vom Zähler des Exponenten vorgeschriebenen Wiederholung jenes negativ genommenen Theils das gleich oft wiederholte Setzen des umgekehrten Wurzelwerthes als Factor. In Zeichen:

$$a^{-\frac{n}{r}} = a^{\frac{(-n)}{r}} = \left(\sqrt[r]{a}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^{n} = \frac{1}{\sqrt[r]{a^n}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{r}}}.$$

Eine Potenz mit negativem gebrochenem Exponenten ist also, wie die mit negativem ganzem Exponenten, dem umgekehrten Werthe einer Potenz gleich zu setzen, deren Exponent dem gegebenen der Größe nach gleich, aber positiv ist.

Auf welche Weise könnten Zahlformen dieser Art entstehen? (Siehe §. 72. 4 und §. 71. 2.) —

Wie entwickeln sich dieselben, wenn auch die Wurzel in Form eines Bruchs gegeben ist, $\left(\frac{a}{c}\right)^{-\frac{n}{r}}$?

Zahlenbeispiele.

5. Die vorigen Erörterungen haben gezeigt, welche Bedeutungen den verschiedenen Potenzformen nicht bloß in Folge ihrer Entstehung, sondern auch der folgerechten Erweiterung des ursprünglichen Potenzbegriffs gemäß zukommen würden. Die Beziehung, welche dieser zwischen der Wurzel und dem Exponenten stiftet, wurde nur allgemeiner aufgefasst, um die neuen Zahlformen zu erklären, welche auch negative und gebrochene Zahlen an der Stelle des letzteren zulassen. Dem ursprünglichen Begriffe der Potenz zufolge war der Exponent bloß zu zählen bestimmt, wie viel mal die Wurzel als Factor gesetzt werden solle, — eben deßhalb eine beziehungslose ganze Zahl. Statt seiner Einheit wurde also die Wurzel der Potenz eben so oft, aber nicht, wie jene, als Theil, sondern als Factor gesetzt. Nun soll überhaupt, auch wenn der Exponent beliebige andere Werthe hat, statt seiner Einheit der Grundfactor der Potenz gesetzt werden, aber nicht, um mit demselben die von jenem vorgezeichneten Acte der Zahlenbildung selbst*), sondern bloß durch diese angedeutete, ihnen nachgeahmte, nämlich diejenigen Operationen vorzunehmen, in welche jene Acte der Zahlenbildung bei durchgängiger Vertauschung der ihnen zum Grunde liegenden Vorstellung des Theils mit der des Factors sich verwandeln würden. So entsprach der Forderung des Exponenten, die Einheit in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu zerlegen, die Zerlegung des Grundfactors in eben so viele gleiche Factoren, und der Forderung, etwas zuerst Gesetztes (Positives) in das ihm als Theil Entgegengesetzte (Negative) umzukehren, die Umkehrung der Zahl, die für das positiv Gezählte zu nehmen war, in denjenigen Werth, der ihr als Factor widerstreitet. Was also überhaupt der Exponent mit der Einheit vorzunehmen fordert, — Wiederholung, Eintheilung, Entgegensetzung, lauter Verrichtungen im Sinne der Addition — soll mit dem Grundfactor, um es kurz zu sagen, im Sinne der Multiplication ausgeführt werden.

Potenz im weiteren Sinne des Worts soll demnach **jede Zahl heißen, welche aus einer gegebenen, dem Grundfactor, dadurch zu bilden ist, daß man mit ihr die den Vorschriften einer anderen Zahl, des Exponenten, im Sinne der Multiplication nachgebildeten Verrichtungen vornimmt.**

Die vier — 0 als Zahlwerth mit eingeschlossen, die fünf — in Absicht auf den Exponenten zu unterscheidenden Potenzformen, welche dieser Begriff umfasst, sind nun rückwärts noch einmal aus demselben zu deuten und mit ihren Bedeutungen zusammenzustellen.

Es ist nicht zu übersehen, daß es nur die Erweiterung einer zusammengesetzten Zahlform ist, welche durch diese Erklärung bezweckt und erreicht wird. Sie macht es möglich, auch Wurzelgrößen als Potenzen, und Quotienten als Producte von Factoren darzustellen; z. B.

---

*) was eine Multiplication des Grundfactors mit dem Exponenten der Potenz gewesen sein würde.

$$\sqrt[4]{a^3} + 3\sqrt{(a-x)} = a^{\frac{3}{4}} + 3(a-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a^2}{c^m} - \frac{1}{6\sqrt[r]{(b+h^2)^5}} = a^2c^{-m} - 6^{-1}(b+h^2)^{-\frac{5}{r}}$$

Ob man aber die eine oder die andere Darstellungsweise wählt, bringt im Wesen der angedeuteten Zahlenverknüpfungen selbst keine Aenderung hervor, und um dieselben auf ihre einfachen Zahlwerthe zurückzuführen, wird immer die nämliche Rechnung erfordert.

Mannigfaltige Uebungen im Uebertragen geeigneter Ausdrücke aus einer Form in die andere.

Auch in der weitesten Bedeutung ist jede Potenz von 1 selbst wieder 1; $1^n = 1$. (Vergl. §. 69. 3.)

Nachzuweisen.

§. 72.

Höchste Verallgemeinerung einiger Sätze über die Potenzirung.

An die Erweiterung des Potenzbegriffs knüpft sich natürlich die Frage, ob nicht die früheren Gesetze und Regeln der Potenzirung, welche sich nur auf die Voraussetzung erstreckten, daß die Exponenten beziehungslose ganze Zahlen sein sollten, sofern sie nicht etwa ausdrücklich an dieselbe gebunden waren, von dieser Einschränkung befreit und auf die Bildung von Potenzen aller Art ausgedehnt werden können.

Es ist aber leicht zu zeigen, daß die Sätze über die Potenzirung von Producten und Quotienten oder Brüchen (§. 69. 2 u. 3) unverändert beibehalten werden dürfen, auch wenn dem Exponenten jeder beliebige Werth zugestanden wird. Nämlich:

1. **Jede Potenz eines Productes ist ein Product aus den gleich hohen Potenzen seiner Factoren.**

$(a.b)^n = a^n.b^n$, — unter n jede beliebige Zahl und selbst 0 verstanden.

Denn ist $n = -m$, m als ganze Zahl gedacht, so ist

$$(a.b)^{-m} = \left(\frac{1}{a.b}\right)^m = \left(\frac{1}{a^m.b^m}\right) = a^{-m}.b^{-m}.$$

Oder ist $n = \frac{m}{r}$, m und r als ganze Zahlen gedacht, so ist

$$(a.b)^{\frac{m}{r}} = \sqrt[r]{(a.b)^m} = \sqrt[r]{(a^m.b^m)} = \sqrt[r]{a^m}.\sqrt[r]{b^m} = a^{\frac{m}{r}}.b^{\frac{m}{r}}.$$

Oder ist $n = -\frac{m}{r}$, so ist

$$(a.b)^{-\frac{m}{r}} = \sqrt[r]{(a.b)^{-m}} = \sqrt[r]{\left(\frac{1}{a^m.b^m}\right)} = \frac{1}{\sqrt[r]{a^m}.\sqrt[r]{b^m}}$$

$$= a^{-\frac{m}{r}}.b^{-\frac{m}{r}}.$$

Und endlich ist $n = 0$, so ist

$$(a.b)^0 = 1 = 1.1 = a^0.b^0.$$

2. Jede Potenz eines Bruchs ist wieder ein Bruch, der sich aus den gleichhohen Potenzen des Zählers und Nenners als Zähler und Nenner zusammensetzt.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, — wiederum für n alle möglichen Werthe zugelassen.

Denn ist $n = -m$, so ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^m}{a^m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}.$$

Oder ist $n = \frac{m}{r}$, so ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{r}} = \sqrt[r]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{\sqrt[r]{a^m}}{\sqrt[r]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{r}}}{b^{\frac{m}{r}}}.$$

Oder ist $n = -\frac{m}{r}$, so ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{r}} = \sqrt[r]{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}} = \sqrt[r]{\left(\frac{b^m}{a^m}\right)} = \frac{\sqrt[r]{b^m}}{\sqrt[r]{a^m}} = \frac{a^{-\frac{m}{r}}}{b^{-\frac{m}{r}}}.$$

Und endlich ist $n = 0$, so ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0}.$$

Die Sätze, auf welchen die hier (ad 1 und 2) bloß in Zeichen angedeuteten Schlüsse beruhen, sind wenigstens durch Verweisung auf §. und Nro. des Lehrbuches, wo sie stehen, anzugeben; — auch wo es nöthig scheint, Zwischenglieder zwischen die auf einander folgenden Formen einzuschieben.

Zahlen- und zusammengesetztere Buchstabenbeispiele.

Wie verhält sich der Größe nach eine Potenz zu ihrem Grundfactor, jenachdem dieser größer oder kleiner als 1, und der Exponent positiv, ein echter oder unechter Bruch (ganze Zahl), — und wie in allen Fällen, wenn der Exponent negativ ist? und weßhalb?

§. 75.

Verallgemeinerung der Regeln für das Rechnen mit Potenzen.

Durch die Einführung der neuen Potenzformen wird ferner auch die Frage angeregt, ob nicht die eben dadurch vereinfachten Regeln für das Rechnen mit Potenzen auch dann noch gültig bleiben, wenn nicht mehr, wie bisher, die Exponenten bloß als beziehungslose ganze Zahlen angenommen werden. Es läßt sich aber in der That die Ausdehnung jener Regeln auf Potenzen aller Art rechtfertigen. Zu dem Ende muß dargethan werden, daß die Resultate ihrer Anwendung in allen Fällen, wo die mit einander zu verknüpfenden Exponenten nicht ausschließlich beziehungslose ganze Zahlen sind, mit denen übereinstimmen, welche nach Uebertragung der neuen Zahlformen in die frühere Bezeichnung auf gewohntem Rechnungswege abzuleiten sind. Um dabei nicht mehr Fälle als nöthig zu unterscheiden, sollen die Exponenten beständig als Brüche bezeichnet werden, weil unter dieser Zahlform bekanntlich auch ganze Zahlen, nämlich als Brüche mit dem Nenner 1, verstanden werden können. Alsdann sind bloß noch die durch Vorzeichen angedeuteten Beziehungen der mit einander zu verknüpfenden Exponenten und unter Umständen die möglichen Verhältnisse ihrer Größe zu berücksichtigen.

Nach diesen Andeutungen soll die allgemeine Gültigkeit nachstehender Regeln bewiesen werden:

1. **Um zwei Potenzen des nämlichen Grundfactors mit einander zu multipliciren, addirt man ihre Exponenten** (algebraisch) **und macht die Summe zum Ex-**

ponenten einer neuen Potenz desselben Grundfactors: diese ist das gesuchte Product.

$$a^n \,.\, a^r = a^{n+r}.$$

Die Exponenten beider Factoren sind entweder einstimmig, und zwar entweder beide positiv oder beide negativ, oder nur der eine ist positiv, der andere negativ, und zwar der erste größer, kleiner oder eben so groß als der andere, oder endlich der eine von beiden ist 0. Für jede dieser Voraussetzungen ist die Richtigkeit der vorstehenden Regel zu erweisen, wie folgt:

$$a^{\frac{m}{s}} \,.\, a^{\frac{v}{w}} = \sqrt[s]{a^m} \,.\, \sqrt[w]{a^v} = \sqrt[sw]{a^{mw}} \,.\, \sqrt[sw]{a^{sv}} = \sqrt[sw]{(a^{mw} \,.\, a^{sv})} = \sqrt[sw]{(a^{mw+sv})}$$

$$= a^{\frac{mw+sv}{sw}} = a^{\frac{m}{s}+\frac{v}{w}};$$

$$a^{-\frac{m}{s}} \,.\, a^{-\frac{v}{w}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{s}} \,.\, a^{\frac{v}{w}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{s}+\frac{v}{w}}} = a^{-\left(\frac{m}{s}+\frac{v}{w}\right)} = a^{\left(-\frac{m}{s}\right)+\left(-\frac{v}{w}\right)};$$

$$a^{\frac{m}{s}} \,.\, a^{-\frac{v}{w}} = \frac{\sqrt[s]{a^m}}{\sqrt[w]{a^v}} = \frac{\sqrt[sw]{a^{mw}}}{\sqrt[sw]{a^{sv}}} = \sqrt[sw]{\left(\frac{a^{mw}}{a^{sv}}\right)}$$

wenn $\frac{m}{s} > \frac{v}{w}$, folg.. $mw > sv$ ist, $= \sqrt[sw]{a^{mw-sv}} = a^{\frac{mw-sv}{sw}} = a^{\frac{m}{s}+\left(-\frac{v}{w}\right)}$

wenn $\frac{m}{s} < \frac{v}{w}$, folgl. $mw < sv$ ist, $= \frac{1}{\sqrt[sw]{a^{sv-mw}}} = a^{-\left(\frac{sv-mw}{sw}\right)} = a^{-\frac{v}{w}+\frac{m}{s}}$

w. $\frac{m}{s} = \frac{v}{w}$, folgl. $mw = sv$ ist, $= 1 = a^0 = a^{\frac{m}{s}-\frac{m}{s}}$

dl. $a^{\mp\frac{m}{s}} \,.\, a^0 = a^{\mp\frac{m}{s}} \,.\, 1 = a^{\mp\frac{m}{s}} = a^{\mp\frac{m}{s}+0}$

Nachweisung an Beispielen, in welchen die Exponenten bestimmte Zahlen sind. Uebungsbeispiele verschiedener Art.

2. Um eine Potenz durch eine andere desselben Grundfactors zu dividiren, subtrahirt man den Ex-

ponenten des Divisors von dem des Dividends (algebraisch) und macht den Rest zum Exponenten einer neuen Potenz des nämlichen Grundfactors: diese ist der gesuchte Quotient.

$$a^n : a^r = a^{n-r}.$$

$$\text{Denn } a^{n-r} . a^r = a^n.$$

Die Richtigkeit dieser Regel kann aber auch, der Uebung wegen, für einzelne Voraussetzungen auf ähnliche Art, wie die Richtigkeit der vorigen Regel, erwiesen werden. — B.

3. Um eine Potenz nochmals auf die Potenz eines beliebigen Grades zu erheben, multiplicirt man beide Exponenten mit einander und macht das Product zum Exponenten einer neuen Potenz des nämlichen Grundfactors: sie ist die verlangte.

$$(a^n)^r = a^{nr}.$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Regel muß sich auf folgende besondere Fälle erstrecken: beide Exponenten sowohl der gegebenen als der neu von ihr zu bildenden Potenz sind positiv, oder jener ist negativ, dieser positiv, oder beide sind negativ, oder endlich einer von beiden ist 0.

Nun ist aber

$$\left(a^{\frac{m}{s}}\right)^{\frac{v}{w}} = \sqrt[w]{\left(\sqrt[s]{a^m}\right)^v} = \sqrt[ws]{a^{mv}} = a^{\frac{mv}{sw}} = a^{\frac{m}{s} \cdot \frac{v}{w}}$$

$$\left(a^{-\frac{m}{s}}\right)^{\frac{v}{w}} = \left(\frac{1}{a^{\frac{m}{s}}}\right)^{\frac{v}{w}} = \frac{1}{a^{\frac{mv}{sw}}} = a^{-\frac{mv}{sw}} = a^{-\frac{m}{s} \cdot \frac{v}{w}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{s}}\right)^{-\frac{v}{m}} = \frac{1}{\left(a^{\frac{m}{s}}\right)^{\frac{v}{w}}} = \frac{1}{a^{\frac{mv}{sw}}} = a^{-\frac{mv}{sw}} = a^{\frac{m}{s} \cdot \left(-\frac{v}{w}\right)}$$

$$\left(a^{-\frac{m}{s}}\right)^{-\frac{v}{m}} = \left(\frac{1}{a^{\frac{m}{s}}}\right)^{-\frac{v}{w}} = \left(a^{\frac{m}{s}}\right)^{\frac{v}{w}} = a^{\frac{mv}{sw}} = a^{\left(-\frac{m}{s}\right) \cdot \left(-\frac{v}{w}\right)}$$

$$\left(a^{\mp\frac{m}{s}}\right)^0 = 1, \text{und } \left(a^0\right)^{\mp\frac{m}{s}} = 1^{\mp\frac{m}{s}} = 1 = a^{\mp\frac{m}{s} . 0}.$$

Wie bei Nro. 1.

4. Um aus einer Potenz die Wurzel eines vorgeschriebenen Grades zu ziehen, dividirt man mit diesem in den Exponenten der Potenz und macht den Quotienten zum Exponenten einer neuen Potenz des nämlichen Grundfactors: sie ist die verlangte Wurzel.

$$\sqrt[r]{a^n} = a^{\frac{n}{r}}$$

Denn $$\left(a^{\frac{n}{r}}\right)^r = a^n.$$

Auch für diese Regel ist der Beweis in einzelnen Fällen nach Art des vorigen zu führen. — B.

Anmerk. Da als Wurzelgrade, wenn nicht neue, noch verwickeltere Zahlformen als die vorigen eingeführt werden sollen, nur absolute ganze Zahlen zugelassen sind, so beschränkt sich die letzte Regel auch ganz von selbst auf diese Annahme. Sie würde indessen auch richtig bleiben, wenn man beliebige andere Zahlen, nur nicht 0, als Wurzelgrade zulassen und den dadurch erzeugten neuen Zahlformen die ihnen gebührende Bedeutung unterlegen wollte. So würde z. B. nach §. 72. Anmerk. $(\sqrt[r]{a^n})^m = \sqrt[\frac{r}{m}]{a^n}$ zu setzen sein, wenn man von der Beschränkung absehen wollte, daß $\frac{r}{m}$ eine ganze Zahl werden müsse, und der letzte Ausdruck würde wieder, nach der vorstehenden Regel behandelt, in $a^{n:\frac{r}{m}} = a^{\frac{nm}{r}}$ übergehen, — eine Form, die der Aufgabe völlig entspricht. Dagegen ist $\sqrt[0]{a^n}$, so lange a^n einen anderen Werth als 1 hat, ein sinnloser, arithmetischen Gesetzen widersprechender, und wenn $a^n = 1$ wäre, ein unbestimmter, nichtssagender Ausdruck; denn im ersten Falle würde er voraussetzen, daß x^0, unter x den gesuchten Werth verstanden, $= a^n$ werden könne, also nicht $= 1$ wäre, und im anderen dürfte jeder beliebige Werth als der gesuchte, x, angenommen werden. Gäbe man aber dem Ausdrucke $\sqrt[0]{a^n}$ die Form $a^{\frac{n}{0}}$, so würde die Ungereimtheit oder Unbestimmbarkeit desselben durch die gänzliche Bedeutungslosigkeit des Zeichens $\frac{n}{0}$ angezeigt. — Uebrigens läßt sich die Form von Wurzelgrößen, deren Wurzelgrade nicht beziehungslose ganze Zahlen sind, wie im angeführten Beispiele füglich immer vermeiden.

Beispiele, in welchen die vier vorstehenden Regeln, alle oder doch mehre derselben, zur Anwendung kommen.

Ferner sind folgende Andeutungen weiter auszuführen:

Schon bei der künstlichen Zahlenbildung werden Potenzen — obschon weder unter diesem Namen, noch in der jetzt gewählten Bezeichnung — als Bestandtheile zusammengesetzter Zahlen eingeführt; — wie denn überall mancher Begriff im Wesentlichen als bekannt angesehen und gebraucht werden darf und muß, lange bevor er zum Gegenstande wissenschaftlicher Erörterung zu machen und mit wissenschaftlicher Schärfe und Allgemeinheit gleichsam auszuprägen ist.

Die Einheiten verschiedenen Ranges eines Zahlensystems sind Potenzen seiner Grundzahl:

$$\ldots .\ 10^3,\ 10^2,\ 10^1,\ 10^0,\ 10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-3}\ \ldots .$$

Den Begriff der Potenz und die allgemeinen Gesetze und Regeln für das Rechnen mit Potenzen als bekannt vorausgesetzt, würden daher manche frühere Sätze und Regeln über das Rechnen mit künstlich gebildeten Zahlen als besondere Anwendungen jener allgemeineren Gesetze und Regeln sich darstellen lassen (z. B. S. 63 unten, §. 37, S. 262, 265. §. 63. 1 b. S. 292, 299, 302 und 311).

Vierzehnter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

---

§. 76.

Exponentiation. — Bedingungen ihrer Möglichkeit.

Die dritte Aufgabe, welche durch den Begriff der Potenz veranlasst wird, nimmt eine Zahl als Potenz einer anderen an, und verlangt, den zugehörigen Exponenten zu bestimmen. Die Lösung dieser Aufgabe wurde vorläufig, abgesehen von der Frage, ob und wann sie möglich ist, Exponentiation genannt.

Darf denn aber jede beliebige Zahl als Potenz jeder beliebigen anderen angenommen werden? — So lange der Begriff der Potenz in seiner ursprünglichen Bedeutung zu nehmen war, hätte man es als den seltensten Zufall betrachten müssen, wenn zwischen zwei willkürlich gewählten Zahlen die angegebene Beziehung wirklich stattgefunden hätte; aber auch nachdem derselbe bis zu seinem jetzigen Umfange erweitert worden ist, kann jene Annahme und die Möglichkeit, die auf ihr beruhende Aufgabe zu lösen, nicht unbedingt zugestanden werden.

1. Potenzen positiver Zahlen sind selbst wieder positiv, wenn der Exponent eine ganze Zahl oder ein Bruch ist, der in seiner kürzesten Form eine unpaare Zahl zum Nenner hat, — zweideutig, d. i. positiv oder negativ, wenn der Exponent ein Bruch ist, der in seiner kürzesten Form eine paare Zahl zum Nenner hat.[1]) Eine negative Zahl als Potenz einer positiven denken zu sollen, ist also nur dann nicht ungereimt, wenn der zugehörige, bloß nach der

Größe beider Zahlen bestimmte Exponent ein Bruch von der zuletzt angegebenen Beschaffenheit wird.

Potenzen negativer Zahlen sind positiv, wenn der Exponent eine paare ganze Zahl oder ein Bruch ist, der in seiner kürzesten Form eine gerade Zahl zum Zähler hat, — negativ, wenn der Exponent eine unpaare ganze Zahl oder ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner ungerade Zahlen sind oder nach Aufhebung gemeinschaftlicher Factoren solche werden, — unmöglich endlich, wenn der Exponent ein Bruch ist, der in seiner kürzesten Form eine paare Zahl zum Nenner hat.[2]) Mag es also immerhin möglich sein, eine Zahl bloß der Größe nach als Potenz einer anderen darzustellen, so wäre es doch widersinnig, jenachdem der gesuchte Exponent in die eine oder andere der genannten Abtheilungen gehört, im ersten Falle eine negative, im zweiten eine positive, und im letzten Falle überhaupt irgend eine Zahl als Potenz einer negativen ansehen zu sollen.

Soll demnach die durch Vorzeichen angedeutete Beziehung zweier Zahlen kein Hinderniß abgeben, die eine als Potenz der anderen anzunehmen, — ein Hinderniß, das ohnehin im Voraus gar nicht immer sicher zu bestimmen ist, — so dürfen beide Zahlen nur positiv sein. Da aber in diesem Falle ihre Beziehung überhaupt gar nicht angedeutet zu werden braucht, so soll fortan die Aufgabe der Exponentiation bloß auf beziehungslose (absolute) Zahlen beschränkt werden.

[1]) [2]) Weßhalb? — An Zahlenbeispielen zu erläutern.

2. Dieß vorausgesetzt, betrifft die fernere Untersuchung, ob es gestattet sei, jede beliebige Zahl als Potenz einer beliebigen anderen anzunehmen, bloß noch die Größe derselben.

Daß 1 als Grundfactor nicht zugelassen werden dürfe, wenn man beabsichtigt, irgend andere Zahlen als Potenzen desselben auszudrücken, geht daraus hervor, weil jede Potenz von 1 ohne Ausnahme selbst wieder 1 ist. (§. 73. a. Ende.)

A. Die als Grundfactor zu wählende Zahl, sie heiße **b**, muß folglich größer oder kleiner sein als 1. Mag zuerst $b > 1$ gesetzt werden. Die Zahl, welche als Potenz derselben angesehen werden soll, heiße N. Sie kann größer oder kleiner sein als b, — um des Falles, wenn beide Zahlen einander gleich sind, als keiner Erläuterung bedürftig, gar nicht zu gedenken.

α) Ist $N > b$, so kann N eine Potenz von b mit ganzem positivem Exponenten, n, also $= b^n$ sein, oder zwischen zwei benachbarten Potenzen dieser Art, b^n und b^{n+1}, liegen. Denn durch beliebige Vergrößerung des Exponenten n kann die Potenz b^n selbst über jede Grenze hinaus vergrößert werden (§. 69. 3 und 4 a. E.). Im ersten Falle ist n der gesuchte Exponent, im zweiten wäre bloß noch zu versuchen, ob nicht $N = b^{n+\frac{k}{r}}$ gesetzt werden könne, unter $\frac{k}{r}$ einen echten Bruch verstanden (also $n < n + \frac{k}{r} < n+1$). Löst man diesen Bruch in lauter Stammbrüche auf, so erhält man

$$b^{n+\frac{k}{r}} = b^{n+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+\text{etc.}} = b^n.b^{\frac{1}{r}}.b^{\frac{1}{r}}.b^{\frac{1}{r}}\ldots = b^n.\sqrt[r]{b}.\sqrt[r]{b}.\sqrt[r]{b}\ldots$$

Allein nur wenn der Factor $b^{\frac{1}{r}}$ oder $\sqrt[r]{b}$ vollständig durch eine Zahl auszudrücken (rational) ist, kann auch das angedeutete Product genau berechnet werden, und nur in diesem Falle wäre es möglich, durch wiederholte Multiplication der Potenz b^n mit dem genannten Factor eine Zahl zu erhalten, welche mit der gegebenen N völlig übereinstimmte, so daß der entsprechende Werth von $n + \frac{k}{r}$ der gesuchte Exponent würde. Man braucht indessen nur an frühere Untersuchungen über die Möglichkeit der Wurzelausziehung zu erinnern, um behaupten zu dürfen, daß dieser Fall gerade der aller unwahrscheinlichste ist*). Wollte man daher in aller Strenge auf der Forderung bestehen, die Zahl N genau als Potenz der anderen b darzustellen, so würde man die Lösung der Aufgabe auf so wenige Fälle beschränken, daß man ihr mindestens allen praktischen Werth nähme.

*) Es ist zu zeigen, daß unzählig viele Werthe, die man dem b geben könnte, die Möglichkeit geradezu ausschließen, $\sqrt[r]{b}$, welche ganze

Zahl man auch für r setzen mag, als rational anzunehmen, und daß diese Annahme, wenn auch für besondere Werthe der durch b und r bezeichneten Zahlen, doch wenigstens nicht für alle Werthe, deren r fähig ist, erlaubt sei.

Man sieht sich demnach hier, wie überall, wo der arithmetischen Größenbestimmung strenge Genauigkeit versagt ist, auf den Versuch angewiesen, das Verlangte bloß näherungsweise, durch Einschließen zwischen Grenzen zu bestimmen, welche sich nach Willkür oder Bedürfniß immer enger und enger zusammenziehen lassen. Die Möglichkeit einer solchen Bestimmung ist aber im gegenwärtigen Falle leicht zu erweisen. Man kann zeigen, daß die berechneten, vollständigen oder genäherten, Werthe zweier Potenzen des Grundfactors b, zwischen welche die Zahl N, wenn sie nicht wirklich eine Potenz desselben ist, eingeschlossen werden soll, einander, folglich um so mehr jener Zahl selbst bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit genähert werden können, — und ebenso wohl, daß die Exponenten solcher Potenzen einander so nahe gebracht werden können, daß ihr Unterschied nicht mehr als einen willkürlich oder nach Bedürfniß gewählten Theil der Einheit beträgt.

Mag nämlich $\sqrt[r]{b}$ rational oder irrational werden, jedenfalls kann man es durch Vergrößerung des Wurzelgrades (r) dahin bringen, daß der vollständige oder genäherte Werth der Wurzel ($\sqrt[r]{b}$) selbst so wenig oder weniger von 1 verschieden ausfällt, als verlangt wird. Dabei muß immer $\sqrt[r]{b} > 1$ bleiben, weil $b > 1$ angenommen ist (§. 70. 3 und 4). Nun verhält sich ein Product zu seinem einen Factor, wie der andere sich zu 1 verhält, und der Unterschied zwischen dem Producte und dem ersten Factor zu diesem, wie der Unterschied zwischen dem zweiten Factor und 1 zu 1. Ein Product also, dessen einer Factor die genannte Wurzel ist, wird immer größer als der andere, und zwar in gleichem Maße, wie die Wurzel größer ist als 1. Da man es nun in seiner Gewalt hat, den Ueberschuß dieser Wurzel über 1 durch Erhöhung ihres Grades bis zu jeder Grenze oder unter jede Grenze der Kleinheit herabzudrücken; so kann man eben dadurch auch den verhältnißmäßig abnehmenden Unterschied zwischen jenem Producte und seinem zweiten Factor so klein und kleiner machen, als verlangt wird, wie groß auch immerhin der letztere sein mag. In der Reihe der Potenzen

$$b^n,\ b^{n+\frac{1}{r}},\ b^{n+\frac{2}{r}}, \ldots b^{n+\frac{k}{r}},\ b^{n+\frac{k+1}{r}} \ldots \text{ u. s. f. bis } b^{n+1}$$

wird aber jede folgende aus der vorhergehenden durch Multiplication mit dem Factor $b^{\frac{1}{r}}$ oder $\sqrt[r]{b}$ abgeleitet. Es ist also möglich, den Unterschied zwischen je zwei benachbarten Potenzen dieser Reihe durch Vergrößerung des r in jedem beliebigen Maße zu verringern. Jede folgende ist größer als die vorhergehende; zwischen der ersten und letzten, b^n und b^{n+1}, liegt die gegebene Zahl N; sie liegt also auch zwischen irgend zwei benachbarten Gliedern dieser Reihe,*) in Zeichen:

$$b^{n+\frac{k}{r}} < N < b^{n+\frac{k+1}{r}},$$

vorausgesetzt, daß unter k jede ganze Zahl, welche kleiner als r ist, oder auch 0 verstanden werden kann. — Damit ist denn die Möglichkeit bewiesen, die Zahl N zwischen zwei Potenzen des Grundfactors b einzuschließen, deren berechnete Werthe einander bis auf jeden noch so kleinen Abstand genähert werden können. Die Exponenten dieser Potenzen, $n + \frac{k}{r}$ und $n + \frac{k+1}{r}$, sind nur um $\frac{1}{r}$ von einander verschieden; r aber kann beliebig groß genommen werden. Es können folglich auch als Grenzen der Zahl N jederzeit zwei Potenzen des Grundfactors b gefunden werden, deren Exponenten nur um einen beliebig klein gewählten Theil der Einheit von einander verschieden sind.

β) Ist $N > b$, während nach wie vor $b > 1$ bleiben soll, so kann N zwischen b und 1 liegen, $= 1$, oder kleiner als 1 sein.

Ist $N = 1$, so ist der gesuchte Exponent $= 0$; denn $b^0 = 1$.

---

*) Da der Fall, daß sie mit einem derselben übereinstimmte, bereits oben angeführt und jetzt durch die Annahme ausgeschlossen ist, N sei keine genaue Potenz von b.

Liegt die Zahl **N** zwischen **b** und **1**, so muß sie zwischen zwei benachbarte Potenzen der Reihe

$$b^0,\ b^{\frac{1}{r}},\ b^{\frac{2}{r}},\ \ldots\ b^{\frac{k}{r}},\ b^{\frac{k+1}{r}}\ \ldots \text{ u. s. f. bis } b^1,$$

fallen, wenn sie nicht zufällig mit einer derselben genau übereinstimmt. Daß sie folglich auch jetzt, wo nicht genau als Potenz des Grundfactors **b** ausgedrückt, doch wenigstens zwischen zwei Potenzen desselben eingeschlossen werden kann, deren berechnete Werthe oder deren Exponenten einander bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit genähert werden können, bedarf nach dem vorhergehenden keines neuen Beweises mehr.

Durch welche Substitution würde die ad α. gebrauchte Reihe in die vorstehende übergehen?

Ist endlich $N < 1$, so ist $\frac{1}{N} > 1$. Entweder also ist, wenn alle Zeichen ihre bisherige Bedeutung behalten, und für **n** so wie für **k** auch **0** gesetzt werden darf,

$$\frac{1}{N} = b^{n+\frac{k}{r}}, \text{ folglich } N = \frac{1}{b^{n+\frac{k}{r}}} = b^{-\left(n+\frac{k}{r}\right)},$$

$$\text{oder } b^{n+\frac{k}{r}} < \frac{1}{N} < b^{n+\frac{k+1}{r}}, \text{ folglich } \frac{1}{b^{n+\frac{k}{r}}} > N > \frac{1}{b^{n+\frac{k+1}{r}}},$$

$$\text{oder } b^{-\left(n+\frac{k}{r}\right)} > N > b^{-\left(n+\frac{k+1}{r}\right)}.$$

Wie demnach jede Zahl, die größer ist als **1**, so kann auch jede Zahl, die kleiner ist, entweder vollständig als Potenz des Grundfactors **b** dargestellt, oder zwischen zwei beliebig genäherte Potenzen desselben eingeschlossen werden. Die Exponenten der genannten Potenzen sind im ersten Falle positive, im zweiten negative Zahlen.

B. Die bisherige Untersuchung wurde in der Voraussetzung geführt, die als Grundfactor anzusehende Zahl, **b**, sei größer als **1**. Ihre Bestimmungen hinsichtlich der Möglichkeit der Exponentiation bleiben unverändert; wenn zweitens angenommen wird, jene Zahl sei kleiner als 1. Denn ist $b < 1$, so ist $\frac{1}{b} > 1$; für jeden beliebigen Werth des Exponenten n ist aber $\left(\frac{1}{b}\right)^n = b^{-n}$ oder $b^n = \left(\frac{1}{b}\right)^{-n}$. Jede Zahl also, die als Potenz des gegebenen Grundfactors b darzustellen sein soll, muß sich auch als Potenz seines umgekehrten Werthes $\frac{1}{b}$, und zwar mit gleich großem, aber dem Zeichen nach entgegengesetztem Exponenten darstellen lassen, und Zahlen, welche nicht als Potenzen des letzteren ausgedrückt werden können, sind eben so wenig fähig, als Potenzen des gegebenen Grundfactors angesehen zu werden. Da nun der umgekehrte Werth desselben eine Zahl, welche 1 übertrifft, und die Möglichkeit bereits erwiesen ist, jede beliebige andere Zahl entweder vollständig als Potenz einer solchen auszudrücken, oder zwischen zwei einander beliebig zu nähernde Potenzen derselben einzuschließen; so folgt daraus die Möglichkeit solcher Bestimmungen auch für die Voraussetzung, daß die als Grundfactor gewählte Zahl kleiner als 1 ist. In denjenigen Fällen, wo man bei der Annahme eines Grundfactors, der größer als 1 ist, positive Exponenten erhielt, bekommt man jetzt negative, und umgekehrt.

3. Trotz der Beschränkung auf beziehungslose Zahlen ist also — um das Ergebniß der vorigen Untersuchung noch einmal zusammenzufassen — die Aufgabe der Exponentiation nur in den seltensten Fällen einer strengen Lösung fähig. Unter b und N zwei solche Zahlen von beliebiger Größe verstanden, nur daß für b der Werth 1 ausgeschlossen wird, ist bis auf wenige Ausnahmen der Gleichung $b^x = N$ durch keine Zahl, die man für den Exponenten x setzen möchte, vollkommen zu genügen. Ausdrücke also, welche die Bestimmung dieses Exponenten fordern, sind meistens irrational (S. §. 61. 6 und 7). Der gesuchte Werth ist alsdann gar nicht als Zahl, sondern nur als Uebergangszustand aus einem Größenverhält-

niß in ein anderes*) zu deuten, als solcher aber durch die Beziehung, in welche er zu gegebenen Zahlen treten soll, auf unzweideutige Art bestimmt. Denn jede, auch die geringste Vergrößerung oder Verminderung des Exponenten hat, jenachdem der Grundfactor größer oder kleiner als 1 ist, eine gleichartige oder die entgegengesetzte Aenderung der Potenz zur Folge. Umgekehrt also kann auch keine Aenderung der Potenz ohne gleichzeitige Aenderung des Exponenten gedacht werden. Mit einem stetigen Uebergange von einer Potenz zu einer anderen müßte auch ein stetiger Fortschritt von dem Exponenten der ersten zu dem Exponenten der zweiten Potenz verbunden sein. Ist nun, was immer angeht, die Zahl N zwischen zwei Potenzen des Grundfactors b eingeschlossen, so liegt der Werth, welcher ihr als Exponent zukommt, auch wenn er nicht durch eine Zahl vollständig wiedergegeben werden kann, jedenfalls zwischen den Exponenten jener beiden Potenzen. Im stetigen Fortschritt von der einen Potenz zur anderen erreicht man aber den Werth N, die Grenze zwischen kleineren und größeren, nur einmal; ihm kann daher auch nur ein einziger, mithin bestimmter Zustand, in welchen gleichzeitig der Exponent übergegangen ist, entsprechen.

Diesem Zustande aber kann man jederzeit durch zwei Zahlen, welche ihn von beiden Seiten begrenzen, so nahe kommen als man will. Sind beide Zahlen von einander oder die ihnen entsprechenden, vollständig oder näherungsweise berechneten, Potenzen von der als solche darzustellenden Zahl so wenig verschieden, daß der Unterschied bei wirklicher Größenbestimmung außer Acht gelassen werden darf; so kann der eine oder andere dieser Grenzwerthe für den gesuchten genommen werden. Die Bestimmung eines solchen Grenzwerthes, bald des kleineren, bald des größeren, sieht man daher in allen Fällen, wo der wahre Werth sich der genauen arithmetischen Bestimmung entzieht, als die Aufgabe der Exponentiation an. Mit

*) Man könnte sagen: »als besonderer Zustand eines stetig zu- oder abnehmenden Größenverhältnisses,« wenn nicht eben in der Vorstellung irrationaler Werthe einer stetig zu- oder abnehmenden Größe der Begriff des Verhältnisses aufgehoben würde.

dem Vorbehalt also, daß irrationale Werthe immer durch hinreichend genäherte Zahlen vertreten werden sollen, kann jede beliebige absolute Zahl, N, als Potenz jeder beliebigen anderen, b, außer 1, angenommen, oder $b^x = N$ gesetzt, und als Exponent, x, eine bestimmte Zahl gefunden werden.

Welche Werthe erhält x, wenn erstens $b > 1$ und $N > b$, oder $1 < N < b$, oder $N < 1$, oder wenn zweitens $b < 1$ und $N < b$, oder $1 > N > b$ oder $N > 1$ ist?

§. 77.

Logarithmen; Logarithmen-System; Briggisches.

Mit Beobachtung der Grenzen, innerhalb welcher die Exponentiation möglich, und der Bedingungen, unter welchen ihre Aufgabe für erledigt anzusehen ist, wäre nun ein allgemeines Verfahren für die wirkliche Ausführung derselben zu entwickeln. Ein solches ist jedoch weder durch die bisherigen Regeln über Potenzirung und Wurzelausziehung hinreichend vorbereitet, noch auch Bedürfniß der Grundlehren der Arithmetik. Diesen genügt vielmehr eine beschränktere Lösung der Aufgabe.

1. Die allgemeine Forderung, jede beliebige (absolute) Zahl als Potenz jeder beliebigen anderen außer 1 darzustellen, würde nämlich leicht auf die weniger umfassende zurückzubringen sein, jede beliebige Zahl als Potenz einer und derselben anderen auszudrücken. Denn wären N und d die gegebenen Zahlen, jene als Potenz, diese als Grundfactor anzusehen, und beide als Potenzen desselben Grundfactors b bekannt, $N = b^n$ und $d = b^\delta$; so hätte man, den gesuchten Exponenten mit x bezeichnend,

$$b^n = N = d^x = (b^\delta)^x = b^{\delta x},$$

$$\text{folglich} \qquad \delta x = n \text{ und } x = \frac{n}{\delta}.$$

Man hätte also erst die beiden Zahlen, welche als Potenz und Grundfactor gegeben sind, in Potenzen eines gemeinschaftlichen Grundfactors umzuformen und nachher den Exponenten, welcher der ersten Zahl angehört, durch den der zweiten zu dividiren. Statt der einen verlangten würde man so zwei Exponentiationen und eine

Division noch oben darein zu verrichten haben. Wären aber die Exponenten, welche den gegebenen Zahlen als Potenzen eines gemeinschaftlichen Grundfactors zukämen, schon bekannt, so würde die Exponentiation auf eine bloße Division zurückkommen. Um von diesem Umstande in der Praxis wirklichen Nutzen zu ziehen, müßte man im Voraus alle Zahlen, deren sie bedarf, in Potenzen eines und desselben Grundfactors verwandeln und mit den Exponenten, welche anzeigen, was für eine Potenz desselben jede Zahl ist, in bequemer Ordnung zusammenstellen.

2. Die wirkliche Berechnung eines solchen Potenzensystems empfiehlt sich aber noch mehr aus dem Grunde, weil erst dieses den Regeln der allgemeinen Potenzenrechnung (§. 75.) Eingang in das Rechnen mit bestimmten Zahlen und dadurch wahre Brauchbarkeit verschafft. Denn jene Regeln würden nur geringen Nutzen haben, wenn ihre Anwendung auf solche Zahlen beschränkt bleiben müßte, welche freiwillig die von ihnen vorausgesetzte Form angenommen haben, während die Vortheile unverkennbar sind, welche sie gewähren, wenn aus einem fertigen Systeme von Potenzen eines und desselben Grundfactors eben so leicht zu jeder Zahl der entsprechende Exponent, als auch umgekehrt zu jedem Exponenten der zugehörige Potenzwerth entnommen werden kann.

3. Vorausgesetzt nun, daß alle Zahlen als Potenzen eines und desselben Grundfactors gedacht werden sollen, nennt man den Exponenten, welcher anzeigt, was für eine Potenz desselben eine Zahl sei, den Logarithmen*) dieser Zahl — den Inbegriff aller als Potenzen desselben Grundfactors gedachten Zahlen und ihrer Logarithmen ein logarithmisches oder ein Logarithmen-System, — und diesen Grundfactor selbst die Basis oder Grundzahl des Logarithmen und des Logarithmen-Systems.

Die bisher durch $b^n = N$ angezeigte Beziehung zwischen dem

*) zusammengezogen aus λογων ἀριθμος, Verhältnißzähler. Der Grund dieser Benennung wird sich im Abschn. XVI. ergeben.

Grundfactor b, dem Exponenten n und der Potenz N wird dieser Kunstsprache gemäß auf folgende Art bezeichnet:

$$n = \log. N \text{ bas. } b \quad (\text{logarithmus } N \text{ baseos } b)$$

»n ist der Logarithme der Zahl N in Bezug auf die Basis b,« oder: $N = \text{num. log. } n \text{ bas. } b$ (numerus logarithmi n baseos b)

»N ist die Zahl, deren Logarithme n in Beziehung auf die Basis b«.

4. Da jede absolute Zahl außer 1 als Basis eines logarithmischen Systems angenommen werden kann (§. 76.), so sind solcher Systeme unzählig viele verschiedene möglich. Wäre aber nur eins derselben vollständig berechnet, so ließe sich daraus jedes andere leicht ableiten. Denn ist b die Basis des ersten schon bekannten, d die Basis des neuen Logarithmen-Systems und N die Zahl, deren Logarithme in diesem Systeme gesucht wird, also wie bei Nro. 1, $d^x = N = b^n$ und $d = b^\delta$, woraus $x = \frac{n}{\delta}$ folgt; so hat man, diese Vorschrift in die neue Bezeichnung übertragen,

$$\log. N \text{ bas. } d = \frac{\log. N \text{ bas. } b}{\log. d \text{ bas. } b}.$$

Wörtlicher Ausdruck dieser Regel.

5. Für den gewöhnlichen Gebrauch am bequemsten ist dasjenige Logarithmen-System, dessen Basis die Grundzahl unseres Zahlensystems, 10, ist. Man nennt es das gemeine oder nach dem Engländer Henry Briggs*), welcher zuerst Logarithmen

*) Briggs starb im J. 1630 als Professor der Mathematik zu Oxford. Als Probe seines logarithmischen Systems gab er 1618 die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000, auf acht Decimalstellen berechnet, unter dem Titel Logarithmorum Chilias prima, und 1624 die Arithmetica logarithmica heraus, in welcher die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000, auf vierzehn Decimalstellen berechnet, enthalten sind. Die Lücke füllte Adrian Vlacq, ein Buchhändler und Mathematiker in Gouda, aus, welcher daselbst die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000, auf zehn Decimalstellen berechnet, herausgab, 2te Ausg. 1628.

Das Verdienst, nicht bloß die Idee der Logarithmen aufgefaßt und für diese Grundzahl berechnete, das **Briggische** System. Die Logarithmen dieses Systems werden durch log. vulg. (logarithmus vulgaris), log. Brigg. (log. Briggianus) oder noch gewöhnlicher durch log. schlechthin, ohne weitere Andeutung der Grundzahl bezeichnet. Also $n = \log. N$ ist gleichbedeutend mit $n = \log.\ \text{vulg.}\ N = \log.\ \text{Brigg.}\ N = \log.\ N\ \text{bas.}\ 10$, und so in anderen Fällen.

Anmerk. Für die Berechnung nach den Methoden, welche die höhere Arithmetik (Analysis) darbietet, am bequemsten und auch in anderer Hinsicht merkwürdig ist das sogenannte **natürliche** oder **hyperbolische** Logarithmen-System, dessen Grundzahl, gewöhnlich mit e bezeichnet, $= 2,718281828459\ldots$ (genäherter Werth der unendlichen Reihe $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} +$ rc.) ist. Die Logarithmen dieses Systems werden zum Unterschiede von den gemeinen mit log. nat. (log. naturalis) bezeichnet.

§. 78.

Berechnung der Logarithmen.

1. Die Berechnung eines Logarithmen-Systems wird dadurch beträchtlich erleichtert, daß man nicht nöthig hat, die Logarithmen von Brüchen und zusammengesetzten ganzen Zahlen ursprünglich zu berechnen. Denn der Logarithme eines Bruchs wird gefunden, indem man den Logarithmen des Nenners von dem des Zählers sub-

ihre Wichtigkeit erkannt, sondern auch zuerst logarithmische Tafeln (wenn gleich von anderer Einrichtung) berechnet zu haben, gebührt aber dem Schotten **Neper**, (englisch **Napier** oder **Nepair** geschrieben), Baron von Merchiston, dessen Werk: Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio etc. auctore et inventore Joanne Nepero. Edinburgi 1614. betitelt ist, — und dem in Deutschland lebenden Schweizer Jobst **Byrg**, welcher ohne Neper's Erfindung zu kennen, auf demselben Princip beruhende Tafeln berechnete und unter dem Titel: Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen etc. Gedruckt, In der alten Stadt Prag. Im Jahr 1620, herausgab. Die letzteren, weniger vollkommen, sind auch weniger bekannt geworden.

trahirt, und der Logarithme einer zusammengesetzten ganzen Zahl, indem man die Logarithmen ihrer Primfactoren addirt.

Ist nämlich $Z = b^z$ und $N = b^n$, so ist $\frac{Z}{N} = \frac{b^z}{b^n} = b^{z-n}$, folglich in jedem System $\log. \left(\frac{Z}{N}\right) = \log. Z - \log. N$, und wäre $N = P.Q.R\ldots$, unter P, Q, R ꝛc. Primzahlen verstanden, und $P = b^p$, $Q = b^q$, $R = b^r$ ꝛc., so wäre

$$N = b^p \,.\, b^q \,.\, b^r \ldots = b^{p+q+r+\text{ꝛc.}}$$

mithin ebenfalls in jedem System

$$\log. N = \log. P + \log. Q + \log. R + \text{ꝛc.}$$

Man braucht also nur die Logarithmen der Primzahlen ursprünglich zu berechnen. Dessenungeachtet wäre die Berechnung eines Logarithmen-Systems von genügendem Umfange und mit hinreichender Genauigkeit der Logarithmen, wie man sich bald überzeugen wird, eine äußerst beschwerliche Arbeit. Freilich ist man derselben, im Besitze fertiger Logarithmen-Tafeln, die wir dem Fleiße unserer Vorfahren verdanken, überhoben, und die vollkommneren Methoden der höheren Arithmetik würden die Mühe um ein Bedeutendes verringern. Indessen schon, um in der vorliegenden Untersuchung nicht unnöthiger Weise eine Lücke zu lassen, und wäre es auch bloß, um das Verdienst der ersten Berechner logarithmischer Tafeln, welchen auch die Methoden der höheren Arithmetik noch nicht zu Gebote standen, besser würdigen zu können, ist die Aufgabe, zu jeder Zahl, oder wie sie jetzt beschränkt werden kann, zu jeder Primzahl für eine bestimmte Basis den Logarithmen zu berechnen, dem gegenwärtigen Standpuncte angemessen wirklich zu lösen.

2. Das zunächst sich darbietende Verfahren ist folgendes. Man schließt zuerst die gegebene Zahl zwischen zwei Potenzen der Grundzahl ein, deren Grade nur um 1 von einander verschieden sind (b^n und b^{n+1}). Alsdann nimmt man zwischen beiden Exponenten das arithmetische Mittel $\left(\frac{n+n+1}{2} = n + \frac{1}{2}\right)$, und berechnet die dazu gehörige Potenz, — das geometrische Mittel der beiden

vorigen Grenzwerthe, oder die Quadratwurzel ihres Productes ($\sqrt{}(b^n \, . \, b^{n+1})$). Jenachdem diese kleiner oder größer ist als die gegebene Zahl, setzt man sie an die Stelle des vorigen kleineren oder größeren Grenzwerthes, behält den anderen bei, nimmt abermals das arithmetische Mittel ihrer Exponenten und berechnet die dazu gehörige Potenz, um sie wieder je nach ihrem Verhältniß zur gegebenen Zahl als kleineren oder größeren Grenzwerth zu gebrauchen. Dasselbe Verfahren wiederholt man so oft, bis die beiden, der gegebenen Zahl immer näher und näher geschobenen Grenzwerthe, oder bis die ihnen zugehörigen Exponenten um weniger als einen beliebig klein gewählten Theil der Einheit von einander verschieden sind. Den einen dieser Exponenten, am häufigsten den kleineren, nimmt man hierauf als den gesuchten Logarithmen an. Nach dem Grade der zu erlangenden Genauigkeit richtet sich übrigens auch die Genauigkeit, mit welcher die verlangten irrationalen Quadratwurzeln zu bestimmen sind.

Wenn A der kleinere, B der größere Grenzwerth ist, zu beweisen, daß $A < \sqrt{}(A . B) < B$ ist.

Um z. B. den gemeinen oder Briggischen Logarithmen von 37 zu berechnen, geht man von den beiden Grenzwerthen 10^1 und 10^2 oder 100 aus. Also liegt der gesuchte Logarithme zwischen 1 und 2. Das arithmetische Mittel beider Exponenten ist $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$,

und die dazu gehörige Potenz $10^{\frac{1+2}{2}} = 10^{1,5} = \sqrt{}(10^1 . 10^2) = \sqrt{}1000 = 31{,}622776601\ldots.$ Nun liegt 37 zwischen $10^{1,5}$ oder $31{,}622776601\ldots$ und 10^2 oder 100, also der gesuchte Logarithme zwischen 1,5 und 2. Das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist $\frac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75$, und $10^{1,} = \sqrt{}(10^{1,5} . 10^2) = \sqrt{}3162{,}2776601\ldots$

$= 56{,}23413252\ldots$ Die neuen Grenzen sind folglich $10^{1,5}$ oder $31{,}622776601\ldots$ und $10^{1,75}$ oder $56{,}23413252\ldots$ Aus ihnen findet man $10^{\frac{1,5+1,75}{2}} = 10^{1,625} = \sqrt{}(10^{1,5} . 10^{1,75})$

$$= \sqrt{}31{,}622776601\ldots \times 56{,}23413252\ldots = 42{,}16965034\ldots$$

Indem man auf die angegebene Art die Rechnung fortsetzt, findet man nach und nach als Grenzwerthe folgende

kleinere		größere	
Logarithmen	Potenzen	Potenzen	Logarithmen
1	10	100	2
1,5	31,622726601..	—»	—»
—»	—»	56,23413252..	1,75
—»	—»	42,16965034..	1,625
1,5625	36,5174127..	—»	—»
—»	—»	39,241897..	1,59375
—»	—»	37,855152..	1,578125
—»	—»	37,180266..	1,5703125
1,56640625	36,847349..	—»	—»
—»	—»	37,013433..	1,56835932..
1,56738278..	36,930297..	—»	—»
1,56787105..	36,971841..	—»	—»
1,56811519..	36,99263...	—»	—»
—»	—»	37,00302...	1,56823725..
1,56817622..	36,99782...	—»	—»
—»	—»	37,00042...	1,56820674..
1,56819148..	36,99912...	—»	—»
1,56819911..	36,99978...	—»	—»
—»	—»	37,0001...	1,5682029..
1,5682015..	36,9999...	—»	—»

Man sieht hieraus, daß log. vulg. 37 zwischen 1,5682015.. und 1,5682029.. liegt, mithin die Richtigkeit des genäherten Werthes 1,56820..., weil so weit beide Grenzen übereinstimmen, bis zu seiner letzten Bruchstelle verbürgt werden kann.

Auf dieselbe Art, wie der vorliegende, ist auch noch der Briggische Logarithme irgend einer anderen Primzahl zu berechnen.

3. Ein anderes Verfahren, den Logarithmen einer (Prim-) Zahl zu berechnen, besteht im Wesentlichen darin, daß man dieselbe in ein Product zum Voraus berechneter Potenzen der Basis auflöst. Solcher Potenzen bedarf man für diesen Zweck einer Reihe, deren Glieder stufenweise bis zu jeder erforderlichen Größe aufsteigen und

auf der anderen Seite nach und nach dem Werthe 1 so nahe kommen, als die jedesmal zu erreichende Genauigkeit der Bestimmung erheischt. Ist die Basis größer als 1 — der gewöhnliche Fall —, so bilden ihre Potenzen mit positiven ganzen Exponenten in natürlicher Ordnung den ersten Theil jener Reihe, und den zweiten Theil derselben verschafft man sich am leichtesten durch wiederholte Ausziehung der Quadratwurzel. Sie liefert nach und nach die Potenzen der Basis vom Grade $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ u. s. f. so daß es keine Grenze der Kleinheit giebt, unter welche nicht auf diesem Wege ebensowohl der Exponent, als auch die Abweichung der Potenz von 1 herabgebracht werden könnte.

Ist nun die beschriebene Reihe von Potenzen der Basis berechnet, so dividirt man die Zahl, deren Logarithme gesucht wird, durch die größte unter allen, welche kleiner sind als sie, den Quotienten abermals durch die größte, welche noch in ihm enthalten ist, u. s. f. bis man einen Quotienten erhält, der in Absicht auf die zu erreichende Genauigkeit der genäherten Bestimmung = 1 gesetzt werden darf. Dieß ist der Fall, wenn er oder der für ihn zu wählende Divisor nur noch so wenig von 1 verschieden ist, daß ein dem Unterschiede proportionaler Bruchtheil der gegebenen Zahl unterhalb der Grenze bleibt, bis wie weit das sie vertretende Product mit ihr übereinstimmen soll, oder wenn der Exponent des neuen Divisors weniger beträgt, als bei der Bestimmung des gesuchten Logarithmen in Betracht kommen soll, mithin = 0 angenommen werden darf. Die nach und nach angewandten Divisoren sind demnach die Factoren, deren Product näherungsweise der gegebenen Zahl gleichgesetzt werden darf. Sie sind Potenzen der Grundzahl (b^α, b^β, b^γ bis b^0 oder 1); die Summe ihrer Exponenten ($\alpha+\beta+\gamma\ldots+0$), so weit man sich den früheren Bestimmungen über das Rechnen mit genäherten Zahlen gemäß auf ihre Richtigkeit verlassen kann, ist folglich der gesuchte Logarithme.

Welche Potenzen würde man für den angegebenen Zweck im Voraus zu berechnen haben, wenn die gewählte Basis kleiner als 1 wäre.

Um Briggische Logarithmen nach dieser Vorschrift bis auf sieben Decimalstellen genau zu berechnen, dient die angehängte Hülfstabelle. Sie enthält in der letzten Spalte unter der Ueberschrift »Potenzen« die Potenzen von 10, deren Exponenten oder Logarithmen in den danebenstehenden Spalten, vollständig in der ersten als gemeine Brüche, und als Decimalbrüche in der zehnten Bruchstelle abgebrochen in der zweiten, angegeben sind. Die vorgesetzte Nro. giebt die Zahl von Quadratwurzelausziehungen an, durch welche die gegenüberstehende Potenz gefunden ist. Die Potenzen der Grundzahl mit positiven ganzen Exponenten, — die höheren Einheiten unseres Zahlensystems — brauchten in dieser Tabelle nicht mit aufgeführt zu werden.

Den Anfang der Berechnung eines Briggischen Logarithmen nach dieser zweiten Methode macht jedesmal die Division der gegebenen Zahl durch die Einheit ihrer höchsten Ziffer. Die ferneren Divisoren sind alsdann aus der beigefügten Tabelle zu entnehmen.

Soll nun nach dieser Methode, um bei dem vorigen Beispiele stehen zu bleiben, log. vulg. 37 berechnet werden, so dividirt man 37 zuerst durch 10 ($=10^1$), den Quotienten 3,7 durch 3,162277660168 ($= 10^{0,5}$), den daraus entspringenden Quotienten 1,170042734226 .. durch 1,154781984468 .. ($= 10^{0,0625}$), als die nächste kleinere Potenz der Tabelle, u. s. f. — Den ganzen Verlauf der Rechnung legt folgende Uebersicht dar.

Quotienten	Divisoren	deren Exponenten	Nro. der Tabelle
37	10	1,0	
3,7	3,16227 76601 68	0,5	1.
1,17004 27342 26	1,15478 19846 8	0,0625	4.
1,01321 52646	1,00903 50447	0,00390 625	8.
1,00414 2789	1,00225 11482	0,00097 65625	10.
1,00188 7392	1,00112 49413	0,00048 82812	11.
1,00076 1594	1,00056 23125	0,00024 41406	12.
1,00019 9169	1,00014 05484	0,00006 10351	14.
1,00005 8613	1,00003 51352	0,00001 52587	16.
1,00002 3477	1,00001 75674	0, ... 76293	17.
1,00000 5909	1,00000 43918	0, ... 19073	19.
1,00000 1517	1,00000 10979	0, ... 04768	21.
1,00000 0419	1,00000 02744	0, ... 01192	23.
1,00000 0145	1,00000 01372	0, ... 00596	24.
1,00000 0007	1,00000 00042	0, ... 00018	29.
1,00000 0003	1,00000 00021	0, ... 00009	30.
1,00000 0001	1,00000 00010	0, ... 00004	31.
1,00000 0000	Summe	1,56820 172..	

Hiernach ist, bis auf acht Decimalstellen genau, log. vulg. 37 = 1,56820172...

Die Angabe hinsichtlich der Genauigkeit dieses Logarithmen ist zu rechtfertigen,

und der Logarithme der vorhin (bei Nro. 2) beispielsweise gewählten Zahl auch nach dieser Methode zu berechnen.

Anmerk. Uebrigens würden bei der Berechnung eines vollständigen Logarithmensystems die Resultate früherer Rechnungen auch zur Auffindung der Logarithmen von Primzahlen auf mancherlei Weise behülflich sein können. Um z. B. log. 569 zu berechnen, könnte man

$$569 = 568 \cdot \left(1 + \frac{1}{568}\right) = 568 \cdot (1{,}001760563\ldots)$$

setzen, und hätte alsdann, wenn log. 568 = log. (71 . 8) bekannt wäre, nur noch log. 1,001760563 ... zu berechnen, um ihn zu jenem hinzu zu addiren, — ähnlicher Erleichterungen zu geschweigen.

§. 79.

Einrichtung und Gebrauch fertiger, zumal der Vega'schen Logarithmen-Tafeln.

Fertige Logarithmen-Systeme stellen die sogenannten Logarithmen-Tafeln dar. Unter diesen sind die von G. Freiherrn von Vega unter dem Titel »Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch ꝛc.« herausgegebenen die am weitesten verbreiteten. Wir beschränken daher die Erklärung der Einrichtung logarithmischer Tafeln auf diese, um so mehr, da andere Tafeln dieser Art im Wesentlichen ebenso eingerichtet sind. Dabei haben wir es gegenwärtig nur mit der ersten Abtheilung jener Tafeln zu thun, welche die Ueberschrift Tabula Logarithmorum vulgarium führt.

1. Die Logarithmen dieser Tafeln sind alle bis auf sieben Decimalstellen angegeben. Die letzte Ziffer ist in dem Falle, wenn der niedrigere, weggelassene Theil des Logarithmen mehr als eine halbe Einheit ihrer Ordnung beträgt, um 1 erhöht, so daß die angegebenen Logarithmen theils zu klein, theils zu groß sind. Der Fehler beträgt so freilich nie eine volle halbe Einheit vom Range der niedrigsten Ziffer: daß aber nicht bemerklich gemacht ist, ob der Logarithme zu groß oder zu klein sei, hat für manche Bestimmungen nicht zu beseitigende Nachtheile.

2. Daß Logarithmen-Tafeln nur die Logarithmen ganzer Zahlen zu enthalten brauchen, ist schon früher erörtert. Unsere Tafeln enthalten nun auf den vier ersten Seiten die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000 vollständig, diese unter der Ueberschrift N. (Numerus), und daneben jene unter der Ueberschrift Log.

3. Auf den folgenden Seiten findet sich in der ersten Spalte unter der Ueberschrift N die Reihe der ganzen Zahlen von 1000 bis 10099, und in der mit 0 überschriebenen Spalte neben jeder Zahl nur der gebrochene Theil ihres Logarithmen, nämlich so, daß die drei ersten Ziffern desselben, so lange sie sich gleich bleiben, nicht wiederholt sind. Man nennt diesen gebrochenen Theil eines Logarithmen seine Mantisse (mantissa = complementum = Ergänzung), und die dazu gehörige ganze Zahl oder, wenn diese fehlt, die Ziffer 0 seine Charakteristik. Die Charakteristik ist bei allen hier in Rede stehenden Logarithmen weg-

gelassen. Sie ist für die Logarithmen aller Zahlen von 1000 bis 10000, letztere ausgeschlossen, 3, denn $1000 = 10^3$ und $10000 = 10^4$. Ueberhaupt ist die Charakteristik des Briggischen Logarithmen jeder ganzen Zahl 1 kleiner als die Anzahl ihrer Ziffern.

Zu beweisen.

Hiernach ist z. B. log. 1091 = 3,0378248.

4. Neben den beiden bisher ins Auge gefassten Spalten finden sich auf jeder Seite auch solche mit den Ueberschriften 1, 2, 3 rc. bis 9. Jede dieser Ziffern, auch die vorhergehende 0, soll als Fortsetzung einer jeden, in der ersten Spalte (N) stehenden Zahl angesehen werden. Wird einer Zahl 0 angehängt, so ist sie mit 10 multiplicirt, z. B. 10910 = 1091 . 10; zu ihrem Log. wäre also, um den Log. der neuen Zahl zu finden, bloß log. 10 = 1 hinzu zu addiren; so ist z. B. log. 10910 = log. 1091 + 1 = 4,0378248. Ueberhaupt ist die Mantisse des Log. einer Zahl auch für jede andere, welche bloß durch Anhängen von Nullen aus ihr entsteht, unverändert beizubehalten, und nur die Charakteristik desselben der vorigen Regel gemäß abzuändern. So ist z. B. log. 1091000 = 6,0378248.

Wird aber einer Zahl eine geltende Ziffer angehängt, so ändert sich auch die Mantisse des vorigen Logarithmen, für die fünfte Ziffer der Zahl jedoch meistens nur so wenig, daß ihre drei ersten Ziffern ungeändert bleiben. Man findet daher die Logarithmen der fünfziffrigen Zahlen und der sechsziffrigen bis 100999 in unseren Tafeln so angegeben, daß man zuerst den höchsten Theil der Zahl mit Ausschluß ihrer letzten Ziffer in der Spalte der Zahlen (links unter N) zu suchen, aus der nächsten Spalte rechts (unter 0) der Zahl gerade gegenüber die drei ersten, und aus der Spalte, welche die letzte Ziffer der Zahl zur Ueberschrift hat, in gleicher Horizontalreihe die vier letzten Ziffern der Mantisse zu entnehmen hat. Demnach ist z. B. log. 10913 = 4,0379442.

Sind nicht die der Zahl gerade gegenüberstehenden (oder gegenüberzustellenden), sondern die nächst folgenden drei ersten Ziffern der Mantisse zu nehmen, so ist den vier letzten ein * vorgesetzt; z. B. log. 10915 = 4,0380237.

5. Unmittelbar sind auf diese Weise nur die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100999 oder 101000 angegeben. Die Tafeln reichen aber aus, um mit leichter Mühe auch noch die Logarithmen aller siebenziffrigen Zahlen und der achtziffrigen bis 10099999 oder 10100000 näherungsweise zu bestimmen. Wie dieses geschehen kann, wird sich am besten an einigen Beispielen deutlich machen lassen.

Mag also zuerst der Logarithme einer sechsziffrigen Zahl z. B. log. 546054 gesucht werden. In den Tafeln findet sich diese Zahl nicht vollständig, wohl aber die nach Abwerfung ihrer letzten Ziffer übrig bleibende 54605, und deren Logarithme 4,7372324. Daraus ergiebt sich log. 546050 = 5,7372324. Man findet ferner

log. 546060 = 5,7372404.

Beide Zahlen, zwischen welchen die gegebene liegt, sind um 10 Einheiten, ihre Logarithmen um 80 Zehnmilliontel von einander verschieden. Angenommen also, innerhalb dieser Grenzen gehe die Zunahme des Logarithmen dem Wachsen der Zahl proportional, so müßten für jedes 1, welches der kleineren Zahl zugelegt wird, ihrem Logarithmen 8 Zehnmilliontel zugelegt werden, und wie jene um 1, 2, 3, 4 u. s. f. bis 9 Einheiten wächst, müßte dieser sich um 8, 16, 24, 32 u. s. f. bis 72 Zehnmilliontel vergrößern. Nun findet aber, wie weiterhin gezeigt werden soll, die angenommene Proportionalität zwischen dem Wachsen jeder mehr als fünfziffrigen Zahl jenseits der fünften Stelle und dem Wachsen der Mantisse ihres Logarithmen innerhalb der sieben höchsten Decimalstellen wirklich statt. Man hat folglich im gegenwärtigen Falle zum log. 546050, um ihn zum log. 546054 zu erheben, noch 80 . 0,4 oder 32 Zehnmilliontel zuzulegen. Also ist

$$\begin{aligned} \log.\ 546054 &= 5{,}7372324 \\ &\quad + 32 \\ &= 5{,}7372356 \end{aligned}$$

Hätte man ferner den Logarithmen einer siebenziffrigen Zahl, z. B. log. 5460549, zu bestimmen, so würde man denselben zuerst wieder zwischen die nächsten von den Tafeln dargebotenen Grenzen einschließen, also log. 5460549 zwischen log. 5460500 = 6,7372324

und log. 5460600 = 6,7372404.

Nun ist die Differenz der Zahlen 100, ihrer Logarithmen 80 Zehnmilliontel. Zahlen und Logarithmen nehmen innerhalb der angegebenen Grenzen gleichförmig zu und ab; folglich kann der Unterschied, um welchen der Log. der gegebenen Zahl den ihres kleineren Grenzwerthes übertreffen muß, aus der Proportion

100 : 49 = 80 Zehnmill. : x Zehnmill.

bestimmt werden. Man findet x (= 80 . 0,49) = 39 . 2 Zehnmilliontel, mithin

$$\begin{aligned} \log.\ 5460549 &= 6{,}7372324 \\ &\quad + 39.2 \\ &= 6{,}7372363. \end{aligned}$$

Nach diesen Erläuterungen wird man leicht die Vorkehrungen verstehen, welche in unseren Tafeln getroffen sind, um auch die hier beschriebenen kleinen Rechnungen noch zu erleichtern. Zur Rechten der Tafeln befinden sich nämlich unter der Ueberschrift P. P. (= Partes Proportionales) noch besondere Täfelchen, welche die sogenannten Proportionaltheile enthalten. An der Spitze jedes Täfelchens steht die Zahl, welche die Menge von Zehnmillionteln angiebt, um welche je zwei benachbarte Logarithmen in der Gegend desselben von einander abweichen: so in dem Täfelchen zur Seite der eben gebrauchten Logarithmen die Zahl 80. Gerade unter dieser, neben den Ziffern 1, 2, 3 ꝛc. bis 9 folgen die Proportionaltheile selbst, hier 8, 16, 24 ꝛc. bis 72; sie bedeuten ebenfalls Zehnmilliontel und sind der Reihe nach, den gegenüberstehenden Ziffern entsprechend, 1, 2, 3 ꝛc. bis 9 Zehntel der darüber stehenden Zahl, — Ziffern niedrigeren Ranges ausgeschlossen, jedoch in dem Falle, wenn sie mehr als eine halbe Einheit der vorhergehenden Ordnung betragen, als ein volles 1 mit in diese herübergezogen. Hieraus erklärt sich der Gebrauch dieser Zahlen.

Ueberschreitet die Zahl, deren Log. gesucht wird, die Grenzen der Tafeln, so sondert man den höchsten Theil derselben ab, so weit er in den Tafeln vorkommt, und nimmt die Mantisse seines Log. als ersten Theil der gesuchten. Man subtrahirt sie von der nächsten größeren; dem Täfelchen, welches den Unterschied als Ueberschrift führt, sind die zur Vervollständigung nöthigen Proportionaltheile zu entnehmen. Für diejenige Ziffer der gegebenen Zahl, welche sich unmittelbar dem vorhin abgegrenzten höchsten Theile derselben anreiht, addirt man den ihr gegenüberstehenden Proportionaltheil, — für die etwa noch folgende zweite Ziffer nur den zehnten Theil des ihr zukommenden Proportionaltheils (jedoch mit Berücksichtigung der wegfallenden Ziffer). Noch niedrigere Ziffern der gegebenen Zahl, für welche nur noch der hundertste, tausendste Theil ꝛc. der neben sie gestellten Proportionaltheile zu addiren wäre, haben eben deßhalb, wie die Tafeln ausweisen, entweder gar keinen, oder doch keinen sicher genug zu bestimmenden Einfluß mehr auf den mit der siebenten Decimalstelle geschlossenen Log. Im ernsthaften Gebrauch kommen indessen auch nicht leicht Zahlen vor, welche mit mehr als sieben Ziffern geschrieben wären, oder auf deren spätere Ziffern noch irgend ein Gewicht zu legen wäre. — Die Charakteristik des Log. wird übrigens der bekannten Vorschrift gemäß bestimmt.

Hiernach ist z. B.

$$\log. 546054 = 5{,}7372324 \text{ (Unterschied vom nächstgrößeren} = 80 \text{ Zehnmill.)}$$
$$+\quad 32 \text{ (wegen 4)}$$
$$= 5{,}7372356$$

$$\text{u. } \log. 5460549 = 6{,}7372324$$
$$+\quad 32 \text{ (wegen 4)}$$
$$+\quad 7.2 \text{ (wegen 9)}$$
$$= 6{,}7372363$$

Es bleibt nun noch übrig, die Annahme zu rechtfertigen, daß innerhalb der sieben höchsten Decimalstellen die Logarithmen sechs- und mehrziffriger Zahlen Aenderungen dieser Zahlen selbst, welche sich nicht auf höhere als die sechste Stelle (von oben) erstrecken, proportional zu- und abnehmen.

Die kleinste sechsziffrige Zahl ist 100000, der größte Zuwachs, dessen sie ohne Aenderung ihrer fünf höchsten Ziffern fähig ist, 9. Man verwandle 100009 in 100000 . 1,00009, so ist log. 100009 = log. 100000 + log. 1,00009 oder log. 100009 — log. 100000 = log. 1,00009, folglich wie 1,00009 der größte Quotient zweier sechsziffriger Zahlen, die nur in ihrer letzten Stelle von einander verschieden sind, so log. 1,00009 der größte mögliche Unterschied zwischen den Logarithmen zweier solcher Zahlen*). Es fragt sich also, ob von log. 1,00009 an abwärts (z. B. in der Reihe: log. 1,00009, log. 1,00008, log. 1,00007 rc.) die Logarithmen, mindestens bis zur siebenten Decimalstelle, in gleichem Maße abnehmen, wie die Zahlen selbst. Nun lehrt aber ein Blick in die angehängte »Hülfstabelle zur Berechnung Briggischer Logarithmen«, daß schon von der vierzehnten Potenz an, welche noch größer ist, als unser Quotient (nämlich 1,00014054...) wenigstens bis zur achten Decimalstelle gleiche Unterschiede der Potenzen auch gleichen Unterschieden ihrer Logarithmen entsprechen, und umgekehrt, — womit die angenommene Proportionalität erwiesen ist. (Vergl. §. 56. 4.)

*) An Beispielen ausführlicher nachzuweisen.

6. Den Log. eines Bruchs zu finden, hat man bekanntlich den Log. des Nenners von dem des Zählers zu subtrahiren. Ist der Bruch ein Decimalbruch, so stimmt der Log. seines Nenners mit der Zahl überein, welche die Menge seiner Bruchstellen angiebt. Der Log. eines unechten Decimalbruchs hat daher dieselbe Charakteristik, welche auch der von dem eigentlichen Bruche abgetrennten ganzen Zahl zukommen würde;

z. B. log. 429,05 (= 4,6325079 — 2) = 2,6325079.

Der Log. eines echten Bruchs, gleichviel ob gemeinen oder Decimalbruchs, ist eine negative Zahl; z. B.

$$\left.\begin{array}{l}\log.\ \frac{3}{8} = 0{,}4771213 - 0{,}9030900 \\ = \log.\ 0{,}375 = 2{,}5740313 - 3\end{array}\right\} = -\ 0{,}4259686.$$

Der Log. eines echten Decimalbruchs erscheint, mit Ausnahme des Falles, wo er bloß eine negative ganze Zahl wird, vor der Zusammenziehung seiner Theile als Summe eines positiven, echten oder unechten Decimalbruchs und einer negativen ganzen Zahl, oder nach Aufhebung der ganzen Einheiten des positiven gegen eben so viele des negativen Theils, gleichsam als positive Mantisse mit negativer Charakteristik: so im vorigen Beispiele log. $0{,}375 = 2{,}5740313 - 3 = 0{,}5740313 - 1$.*) Diese Form ist für die meisten mit Logarithmen vorzunehmenden Rechnungen, vorzüglich aber für das Aufsuchen der ihnen zugehörigen Zahlen bequemer als die zusammengezogene. Man kann sie auch den Logarithmen gemeiner echter Brüche geben, indem man dem Log. des Zählers so viele oder mehr Einheiten zulegt, daß sich der Log. des Nenners von ihm abziehen läßt, und nach diesem Abzuge die zugelegte Zahl dem Reste als subtractiv oder negativ wieder beifügt; z. B.

$$\begin{array}{rl} & +1 \qquad\quad -1 \\ \log.\ \frac{3}{8} = & 0{,}4771213 \\ - & 0{,}9030900 \\ \hline = & 0{,}5740313 - 1 \end{array}$$

Abgesehen davon, daß hierdurch die Berechnung der Log. gemeiner echter und unechter Brüche äußerlich gleichförmiger wird, so verdient diese Form noch aus einem andern Grunde den Vorzug. Sie bewirkt nämlich, daß die Logarithmen aller dekadisch gebildeten Zahlen, welche sich bloß in Absicht auf die Stellung des Decimalkommas von einander unterscheiden, dieselbe Mantisse bekommen;

$$\begin{array}{lrl} \text{z. B.}\ \log. & 42905 & = 4{,}6325079 \\ \log. & 429{,}05 & = 2{,}6325079 \\ \log. & 0{,}042905 & = 0{,}6325079 - 2 \end{array}$$

7. Die Vorschrift endlich, zu einem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl zu finden, ergiebt sich leicht aus den vorigen.

---

*) Nimmt man als negativen Theil eines so geformten Logarithmen 10 an, (z. B. log. $0{,}375 = 9{,}5740313 - 10$), so heißt der positive Theil die dekadische Ergänzung des Log. (vorzugsweise gebräuchlich von den Logarithmen der sogenannten trigonometrischen Functionen).

Ist der Log. eine positive oder negative ganze Zahl, so ist die zugehörige Zahl im ersten Falle eine höhere dekadische Einheit, die mit eben so vielen Nullen geschrieben wird, als der Log. Einheiten hat, im zweiten Falle der umgekehrte Werth einer solchen; z. B.

$$\text{num. log. } 4 = 10000$$
$$\text{num. log.} (-4) = 0{,}0001.$$

Ist der Log. ein echter oder unechter Bruch, so drücke man ihn, sofern er nicht schon diese Form hat, als Decimalbruch, und ist er negativ, als Summe eines positiven (echten oder unechten Decimal-) Bruchs und einer negativen ganzen Zahl aus. Alsdann suche man seine Mantisse in den Tafeln auf, oder findet sich diese nicht vollständig, die nächstkleinere, und schreibe die dazu gehörige Zahl mit Vorbehalt demnächst erfolgender Feststellung des absoluten Ranges ihrer Ziffern aus. Im ersten Falle kann man derselben noch zwei Nullen anhängen, sofern überall die Besetzung dieser Stellen in Betracht kommt; niedrigere Ziffern sind nicht mehr verbürgt. Um sie im zweiten Falle so weit als thunlich zu bestimmen, subtrahire man die als nächst kleinere gefundene Mantisse von der gegebenen, suche den Rest unter den Proportionaltheilen des Täfelchens, welches die Differenz jener kleineren und der nächst größeren Mantisse zur Ueberschrift hat — wenn er sich nicht genau unter denselben findet, den nächst kleineren, und zu dem Ueberschusse abermals von den um ihre Endziffer verkürzten Proportionaltheilen desselben Täfelchens den nächst kleineren. Die Ziffern, welche diesen Proportionaltheilen gegenüber stehen, sind den vorhin gefundenen der gesuchten Zahl in der Ordnung, wie sie erfolgen, als nächst niedrigere anzureihen.

Um nunmehr die wahre Geltung der bis jetzt bloß ihrer Rangfolge nach zusammengestellten Ziffern zu bestimmen, verfährt man folgendermaßen. Ist der gegebene Log. positiv, so schneidet man von oben her in der Reihe der gefundenrn Ziffern eine mehr mit dem Decimalkomma ab, als die Charakteristik Einheiten zählt: hat die Zahl nicht so viele Ziffern, so findet man den Rang der vorhandenen durch Zuzählen der fehlenden Stellen. Ist hingegen der Log., als negativer Bruch, aus einem positiven und einer negativen ganzen Zahl zusammengesetzt, so rückt man das Decimalkomma von der Stelle, welche ihm die Charakteristik des positiven Theils anweisen würde, wieder um so viele Stellen aufwärts, als der negative Theil Einheiten hat, etwa fehlende durch Nullen ergänzend.

Hiernach findet man z. B.

$$\text{num. log. } 3{,}2225604 = 1669{,}400\ldots$$

Für ein anderes Beispiel genügen folgende Andeutungen:

Gegebene Mantisse *, 4120867		entsprechende Ziffern der gesuchten Zahl:
die nächst kleinere *, 4120740	...	25827
deren Differenz 127		
d. nächstkl. Proportionaltheil 118	....	7
die neue Differenz 9		
der nächstkl. verkürzte Prop.theil 8.4	....	5
	überhaupt	2582775

Folglich ist

num. log. 4,4120867 = 25827,75..

num. log. 0,4120867 = 2,582775..

num. log. 0,4120867 − 2 = 0,02582775..

Jede Vorschrift dieses §. ist an einer hinreichenden Menge von Beispielen zu üben und zu erläutern.

§. 80.

Regeln für das Rechnen vermittelst Logarithmen.

Die Anwendung der Logarithmen beim Rechnen beruht, dem Begriffe dieser Zahlen gemäß, auf den allgemeinen Regeln für das Rechnen mit Potenzen (§. 75.), und beschränkt sich daher auf die Lösung bestimmter Aufgaben der Multiplication, Division, Potenzirung, Wurzelausziehung und Exponentiation. Die Vorschriften für die Ausführung dieser Rechnungsarten vermittelst Logarithmen ergeben sich so leicht aus den angeführten Regeln, daß es nur der neuen Kunstsprache und einiger nützlicher Anmerkungen wegen nicht überflüssig erscheint, sie noch besonders herzusetzen.

1. Um vermittelst Logarithmen zwei oder mehre Zahlen mit einander zu multipliciren, addire man ihre Logarithmen, nehme die Summe selbst wieder als Logarithmen und suche die dazu gehörige Zahl: sie ist das verlangte Product.

Diese Vorschtift knüpft sich leicht an den kürzeren Satz: der Logarithme eines Products ist die Summe der Logarithmen seiner Factoren.

$$\log.(A.B) = \log.A + \log.B.$$

Zurückführung der Regel auf die ihr zum Grunde liegende.

Kommen unter den Factoren echte Brüche vor, so ist die im vorigen §. Nro. 6 beschriebene, zweitheilige Form ihrer Logarithmen der zusammengezogenen vorzuziehen.

Weßhalb? — Beispiele nach Art der folgenden:

1. Aufgabe: $365 \, . \, 81{,}254 = ?$

Rechnung: $2{,}5622929 \quad (= \log. 365)$

$+ \; 1{,}9098447 \quad (= \log. 81{,}254)$

$= 4{,}4721376 \quad = \log. 29657{,}71$ (Product.)

2. Aufgabe: $5{,}029836 .. \times 0{,}1303867 ... = ?$

Rechnung: $0{,}7015538 \quad (= \log. 5{,}029836 ..)$

$+ \; 0{,}1152333 - 1 (= \log. 0{,}1303867 ..)$

$= 0{,}8167871 - 1 = \log. 0{,}655823 ..$ (Product.)

2. Um vermittelst Logarithmen eine Zahl durch eine andere zu dividiren, subtrahire man den Log. der zweiten Zahl von dem der ersten, nehme den Rest selbst wieder als Logarithmen und suche die dazu gehörige Zahl: sie ist der verlangte Quotient.

Es genügt auch schon, sich die Regel zu merken: um den Log. eines Quotienten zu finden, subtrahire man den Log. des Divisors von dem des Dividends.

$$\log.\left(\frac{A}{B}\right) = \log. A - \log. B.$$

Zurückführung der Regel auf die ihr zum Grunde liegende.

Vorausgesetzt, daß jeder negative gebrochene Log. einer gegebenen Zahl als Summe zweier widerstreitender Theile, eines positiven, welcher die Mantisse enthält, und einer negativen ganzen Zahl, ausgedrückt ist, und daß auch der Log. des Resultats, falls er ein negativer Bruch wird, in diese Form gebracht werden soll, verfährt man im vorliegenden Falle am zweckmäßigsten nach folgender Vorschrift. Ist der Log. des Dividends, falls er positiv ist, oder dessen positiver Theil, falls er negativ ist, kleiner als der Log. des Divisors oder dessen positiver Theil; so lege man jenem so viele ganze Einheiten zu, daß dieser sich wirklich von ihm abziehen läßt, verrichte diesen Abzug und bringe nachher die zugelegte Zahl als negativen Theil des Minuends in Rechnung.

Beispiele, mit mannigfaltigen Veränderungen der Voraussetzung den folgenden nachzubilden:

1. Aufgabe: 37,5 : 567,925 = ?

Rechnung: 1,5740313 (= log. 37,5)
— 2,7542900 (= log. 567,925)

= 0,8197413 — 2 = log. 0,0660300..(Quotient.)

2. Aufgabe: 6,691072..: 0,915346.. = ?

Rechnung: 0,8254956 (= log. 6,691072..)
— (0,9615853 — 1)(= log. 0,915346..)

0,8639103 = log. 7,30988..(Quotient).

3. Vermittelst Logarithmen eine Zahl **zur Potenz eines vorgeschriebenen Grades zu erheben**, multiplicire man mit diesem den Log. jener Zahl, nehme das Product selbst wieder als Logarithmen und suche die dazu gehörige Zahl: sie ist die verlangte Potenz.

Diese Vorschrift ist auch aus dem kürzeren Satze zu entnehmen: der Log. einer Potenz ist das Product ihres Grades und des Log. ihres Grundfactors.

$$\log.(A^n) = n . \log. A.$$

Die Regel auf die ihr zum Grunde liegende zurückzuführen.

Ist der Log. des Grundfactors **negativ**, so hat die bekannte zweitheilige Form desselben nur dann unzweifelhafte Vorzüge, wenn der Exponent der verlangten Potenz eine positive ganze Zahl ist.

Weßhalb? — Welche Voraussetzung wäre in Beziehung auf den negativen Theil des Log. zu machen, oder wie wäre derselbe vorzubereiten, wenn der Exponent ein positiver Bruch wäre, und die zweitheilige Form des negativen Log., ohne die Rechnung weitläufiger zu machen, beibehalten werden sollte?

Beispiele, wie die nachstehenden, jedoch auch mit gebrochenen und negativen Exponenten.

1. Aufgabe: $58{,}075^6 = ?$

Rechnung: 1,7639892 (= log. 58,075)
× 6

= 10,583935 = log. 383650*****/*

also die Potenz = 383650 Hunderttausender.

2. Aufgabe: $(0{,}9235604..)^5 = ?$

Rechnung: 0,9654653 — 1 (= log. 0,9235604..)
× 5

= 4,827327 — 5 = log. 0,671935..(Potenz).

4. Vermittelst Logarithmen aus einer Zahl die Wurzel vorgeschriebenen Grades zu ziehen, dividire man den Log. jener Zahl durch den Wurzelgrad, nehme den Quotienten selbst wieder als Logarithmen und suche die dazu gehörige Zahl: sie ist die verlangte Wurzel.

Statt dieser Vorschrift genügt auch schon die einfachere: den Log. einer Wurzelgröße zu finden, dividire man den Log. derjenigen Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, durch den Wurzelgrad.

$$\log.(\sqrt[n]{A}) = \frac{\log.A}{n}.$$

Die Regel auf die ihr zum Grunde liegende zurückzuführen.

Ist der Log. derjenigen Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, negativ; so verdient wieder die mehrerwähnte zweitheilige Form vor der zusammengezogenen den Vorzug. Um aber auch als negativen Theil des gesuchten Log. wieder eine ganze Zahl zu erhalten, hat man zuvor, wenn es nöthig ist, durch gleichzeitiges Zulegen der entsprechenden Zahl von Einheiten zu dem positiven und negativen Theile des gegebenen, dafür zu sorgen, daß der letztere dem Wurzelgrade gleich oder ein Vielfaches desselben wird.

Beispiele wie folgende:

1. Aufgabe: $\sqrt[5]{10069754} = ?$

Rechnung: $7{,}0030189$ ($= \log.\ 10069754$)

$: 5$

$= 1{,}4006037 = \log.\ 25{,}15381..$ (Wurzel).

2. Aufgabe: $\sqrt[3]{0{,}347998..} = ?$

Rechnung: $2{,}5415768 - 3$ ($= \log.\ 0{,}347998..$)

$: 3$

$= 0{,}8471922 - 1 = \log.\ 0{,}7033837..$ (Wurzel).

5. Wenn eine Zahl als Potenz einer anderen gegeben ist, den zugehörigen Exponenten zu finden, hat man den Logarithmen der ersten Zahl durch den der zweiten zu dividiren.

Soll $A = B^x$ sein,

so ist $x = \dfrac{\log. A}{\log. B}$.

Ableitung dieser Regel. (Vergl. §. 77. 1 u. 4.)

Nur bei der Lösung dieser Aufgabe ist die einfache Gestalt negativer Logarithmen unbedingt der zweitheiligen vorzuziehen.

1. Soll $69 = 2^x$ sein,

$$\begin{array}{ll} & (\log. 69) \quad : \quad (\log. 2) \\ \text{so ist} \quad x = & 1{,}8388491 : 0{,}3010300 \\ = & 6{,}108524\ldots \end{array}$$

2. Soll $0{,}573016.. = 24^x$ sein,

$$\begin{array}{ll} & (\log. 0{,}573016.): \ (\log. 24) \\ \text{so ist} \quad x = & -\ 0{,}2418331 : 1{,}3802112 \\ = & -\ 0{,}1752146\ldots \end{array}$$

Andere Beispiele.

Zum Beschluß Aufgaben, bei welchen mehre der vorstehenden Regeln zugleich anzuwenden sind, z. B.

$$\frac{763{,}5 \,.\, \sqrt{0{,}417}}{8{,}015^4}; \quad \frac{4{,}196^5 \cdot 0{,}0083}{16} + \sqrt[3]{\left(\frac{591 \,.\, 816{,}5}{2\sqrt{3{,}141592}}\right)} \text{ rc.}$$

1. Anmerk. Die Vortheile, welche vielen Rechnungen die Anwendung der Logarithmen verschafft, springen in die Augen. Potenzirungen und Wurzelausziehungen werden dadurch auf Multiplicationen und Divisionen zurückgebracht, und solche, deren Grad den dritten übersteigt, diejenigen etwa ausgenommen, deren Grade aus den Factoren 2 und 3 zusammengesetzt sind, erst in den Kreis elementarer Rechnungen gezogen, so lange man, wie es eben im Hinblick auf die Aushülfe der Logarithmen geschieht (§. 69), auf die Entwickelung allgemeiner Regeln für dieselben verzichtet. — Addition und Subtraction können durch Logarithmen nicht vermittelt werden. Fordert daher eine Aufgabe abwechselnd diese und andere, bequem durch Logarithmen zu verrichtende Operationen, so wird die Rechnung öfter als bloß zu Anfang und Ende von den Zahlen zu ihren Logarithmen und umgekehrt von diesen zu jenen überzugehen genöthigt. In einzelnen Fällen kann man jedoch diesen Uebelstand bloß durch Veränderung der Form, welcher man die Rechnung unterwirft, vermeiden oder wenigstens vermindern. Anstatt z. B. der Formel $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ zu folgen, rechnet man mit Logarithmen weit bequemer nach der gleichgeltenden Vorschrift $\sqrt{((a+b)(a-b))}$.

An Beispielen zu erläutern.

2. Anmerk. Die meisten Logarithmen sind bloß genäherte Zahlen. Auf das Rechnen mit ihnen würden daher die früheren Bestimmungen für das Rechnen mit genäherten Zahlen (Abschn. III.) anzuwenden sein, wenn nicht der Umstand, daß die gewöhnlichen Tafeln darüber ungewiß lassen, ob ein Log. zu klein oder zu groß ist, einige Abänderungen derselben nöthig machten, die indessen leicht Jeder selbst findet. Jene Ungewißheit hebt den scheinbaren Vortheil der Einrichtung, daß die Unsicherheit jedes Log. auf weniger als eine halbe Einheit seiner niedrigsten Ordnung herabgebracht ist (§. 79. 1), wieder auf. Den Grenzen, zwischen welchen der Log. des Resultats sich halten muß, entsprechen übrigens die Grenzen des Resultates selbst.

Sind die Zahlen, deren Verknüpfung durch Hülfe der Logarithmen bewerkstelligt werden soll, selbst bloß genäherte; so findet man die Grenzen, zwischen welchen das Resultat enthalten sein muß, indem man derselben Rechnung sowohl die kleineren als die größeren Grenzwerthe zum Grunde legt, — gleichartige und ungleichartige, sofern überall zwei oder mehr genäherte Zahlen mit einander zu verbinden sind, je nach der Beschaffenheit der mit ihnen vorzunehmenden Rechnungsart zusammenstellend, um die am weitesten aus einander fallenden Resultate zu erhalten.

Funfzehnter Abschnitt.

Von der Auflösung quadratischer Gleichungen.

---

§. 81.

Auflösung reiner quadratischer Gleichungen mit einer unbekannten Grösse.

Wie der Lehre von den einfachen Rechnungsarten eine Anleitung zur Auflösung einfacher Gleichungen sich anschloß, so dürfte man als Anwendung der Lehre von den Potenzen die Anweisung erwarten, wie Gleichungen des zweiten, dritten, vierten, überhaupt höheren Grades (§. 49. 2), oder noch allgemeiner, wie Gleichungen, welche beliebige Potenzen der gesuchten Zahl (auch solche mit gebrochenen und negativen Exponenten) enthalten, aufzulösen seien. Indessen nur die Auflösung der Gleichungen zweiten Grades kann auf den Grund der bisher vorgetragenen Lehren in jeder Hinsicht befriedigend erörtert werden. Denn wenn auch nicht die Ableitung der allgemeinen Formeln für die Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades, so setzt doch eine gründliche und vollständige Entwickelung aller Verhältnisse, die dabei in Frage kommen, die erweiterten Lehren der höheren Arithmetik und namentlich eine umfassende Theorie der Wurzelausziehung voraus. Und selbst mit Hülfe dieser Lehren ist es bisher noch nicht gelungen, allgemeine und directe Vorschriften für die Auflösung von Gleichungen eines höheren als des vierten Grades aufzufinden.*)

---

*) Solche Vorschriften müßten angeben, wie aus den bekannten, allgemein durch Buchstaben bezeichneten Factoren (Coefficienten) der Glieder einer gegebenen Gleichung durch bekannte Operationen die gesuchte Zahl zu be-

Wir beschränken uns daher hier auf die Entwickelung des Verfahrens, wodurch Gleichungen vom zweiten Grade aufzulösen sind, — um so mehr, da die gewöhnliche Praxis nur selten die Auflösung von Gleichungen höheren Grades fordert.

Indem wir uns dabei auf die im Abschn. **VII.** vorgetragenen Grundlehren der Algebra zurückbeziehen, haben wir nur noch die Bemerkung hinzuzufügen, daß in den Gleichungen zweiten, wie überhaupt in allen Gleichungen höheren Grades die gesuchten Zahlen durchaus als unbenannte angesehen werden müssen.

Weßhalb?

1. Beschränken wir uns zuerst wieder auf Gleichungen mit einer unbekannten Größe. Sie werden, — um die frühere Erklärung (§. 49. 2) in die neue Kunstsprache zu übertragen — vom zweiten Grade oder quadratische genannt, wenn sie, entwickelt und möglichst vereinfacht, das Quadrat (die zweite) und keine höhere Potenz der unbekannten Größe enthalten.

Man theilt sie ein in reine und gemischte, jenachdem sie bloß das Quadrat, oder außer diesem auch noch die erste Potenz der unbekannten Größe in sich schließen. Jene können allgemein unter der Form $ax^2 = b$,
diese unter der Form $ax^2 + bx = c$ dargestellt werden.

Die Allgemeinheit dieser Formen zu rechtfertigen.

2. Die Auflösung reiner quadratischer Gleichungen erfordert, nachdem dieselben in die vorige Form gebracht sind, nur noch wenige Schritte.

Aus $ax^2 = b$

folgt $x^2 = \frac{b}{a}$ (nach §. 48. 5)

und $x = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}$,

---

rechnen sei. — Die höhere Algebra ersetzt sie, wenn auch nicht vollkommen, doch für die meisten practischen Bedürfnisse genügend durch die Angabe gewisser Beziehungen, welche zwischen den bekannten und gesuchten Zahlen der Gleichungen höheren Grades stattfinden, und durch darauf gestützte Methoden, nach welchen die letzteren, wenigstens wenn sie reell sind mit beliebigem Grade der Näherung bestimmt werden können.

da dem obersten Grundsatze der Algebra (§. 48. 2) zufolge auch die Quadratwurzeln, welche aus den beiden Seiten einer Gleichung gezogen werden, einander gleich sein müssen.

Statt der Form $ax^2 = b$ hätte man auch gleich die der Auflösung noch näher stehende $x^2 = \frac{b}{a}$, oder für den Quotienten $\frac{b}{a}$ das einfache Zeichen g setzend, $x^2 = g$ als die allgemeine Form reiner quadratischer Gleichungen annehmen können. Alsdann wäre $x = \sqrt{g}$.

3. Man darf aber nicht vergessen, daß jede Quadratwurzel zweideutig, sowohl positiv als negativ, also $x = \mp \sqrt{g}$ zu schreiben ist. Die Auflösung einer reinen quadratischen Gleichung ergiebt demnach immer zwei, der Größe nach gleiche, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werthe für die unbekannte Größe, $x = +\sqrt{g}$ und $x = -\sqrt{g}$, welche beide den Bedingungen der Gleichung Genüge leisten. Ist aber dem x eine bestimmte Bedeutung untergelegt, so kann in vielen Fällen nur einer derselben, gewöhnlich nur der positive, als Antwort auf die vorgelegte Frage zugelassen werden.

An Beispielen zu erläutern.

Eigentlich hätte man sollen auch x, als $\sqrt{x^2}$, $= \mp x$ setzen. Allein die vier verschiedenen Zusammenstellungen, welche in der Gleichung $\mp x = \mp \sqrt{g}$ vereinigt sind, ergeben doch nur die eben genannten zwei verschiedenen Werthe für x.

Nachzuweisen.

4. Daß der Werth der unbekannten Größe, $\mp \sqrt{g}$, häufig irrational werden muß, braucht kaum erinnert zu werden. Ist aber g oder $\frac{b}{a}$ negativ, so wird jener Werth, $\mp \sqrt{-g}$, imaginär,— ein Beweis, daß die Aufgabe denselben Bedingungen unterwirft, welchen gar nicht durch eine Zahl genügt werden kann, weil es keine giebt, deren Quadrat negativ würde.

An Beispielen weiter auszuführen.

§. 82.

Auflösung gemischter quadratischer Gleichungen mit einer unbekannten Grösse.

1. Die allgemeine Form gemischter quadratischer Gleichungen mit einer unbekannten Größe $ax^2 + bx = c$ läßt sich dadurch noch etwas vereinfachen, daß man sie durch den Coefficienten des x^2 dividirt, wodurch sie in $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$ übergeht. Setzt man für die Quotienten $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ einfache Zeichen, z. B. f und g, so erhält man die neue, noch ebenso allgemeine Form $x^2 + fx = g$.

Um sie aufzulösen, muß man aus ihr zunächst eine Gleichung ersten Grades abzuleiten suchen. Dazu ist die Ausziehung der Quadratwurzel erforderlich. Die beiden Glieder der ersten Seite können als die beiden ersten Theile des Quadrats einer zweitheiligen Wurzel angesehen werden $[(x + \alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2]$. x als ersten Theil dieser Wurzel angenommen, enthält der Coefficient des in x multiplicirten Gliedes, f, das Doppelte ihres zweiten Theils $[f = 2\alpha$, also $\alpha = \frac{1}{2}f]$. Wird daher das Quadrat der Hälfte dieses Coefficienten, $\left(\frac{f}{2}\right)^2 = \frac{f^2}{4}$, der ersten Seite der Gleichung zugelegt, so stellt dieselbe das vollständige Quadrat der zweitheiligen Wurzel $x + \frac{f}{2}$ dar. Natürlich muß dasselbe, zur Erhaltung der Gleichheit, auch auf der zweiten Seite der Gleichung addirt werden. Dadurch erhält man:

$$x^2 + fx + \frac{f^2}{4} = g + \frac{f^2}{4},$$

und daraus durch Ausziehung der Quadratwurzel aus beiden Seiten:

$$x + \frac{f}{2} = \mp \sqrt{\left(g + \frac{f^2}{4}\right)}$$

$$\text{folglich:}\quad x = -\frac{f}{2} \mp \sqrt{\left(g + \frac{f^2}{4}\right)}.$$

Wie wäre das Verfahren, diesem entsprechend, einzurichten gewesen, wenn man die anfängliche Form $ax^2 + bx = c$ beibehalten hätte? — und welche Vorzüge hat die hier gewählte Form vor jener?

2. Da jede Quadratwurzel ebensowohl positiv als negativ genommen werden kann, so bekommt man auch hier wieder zwei, und zwar im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe für die unbekannte Größe, nämlich

$$x = -\frac{f}{2} + \sqrt{\left(g + \frac{f^2}{2}\right)} \quad \text{oder} \quad \frac{-f + \sqrt{(4g+f^2)}}{2}$$

$$\text{und} \quad x = -\frac{f}{2} - \sqrt{\left(g + \frac{f^2}{4}\right)} \quad \text{oder} \quad \frac{-f - \sqrt{(4g+f^2)}}{2}.$$

Eigentlich hätte sollen auch das Resultat der Wurzelausziehung aus der ersten Seite der Gleichung als zweideutig, nämlich als $\mp\left(x + \frac{f}{2}\right)$, bezeichnet werden. Indessen von den vier in dem Ausdrucke $\mp\left(x + \frac{f}{2}\right) = \mp\sqrt{\left(g + \frac{f^2}{4}\right)}$ zusammengezogenen Gleichungen stimmen wieder je zwei und zwei überein.

Nachzuweisen.

Gleich sind die beiden Werthe der unbekannten Größe nur dann, wenn $g + \frac{f^2}{4} = 0$, also $g = -\frac{f^2}{4}$ ist, mithin die anfängliche Gleichung unter die Form $x^2 + fx = -\frac{f^2}{4}$ paßt. B.

Ob sie rational oder irrational sind, hängt davon ab, ob die Summe $g + \frac{1}{4}f^2$ oder $4g + f^2$ ein vollständiges Quadrat ist oder nicht.

3. Die Auflösung gemischter quadratischer Gleichungen führt auf imaginäre Ausdrücke, wenn g negativ und größer als (das immer positive) $\frac{1}{4}f^2$ (oder $4g > f^2$) ist. Es stellt sich dadurch wieder nur die Unmöglichkeit heraus, eine Zahl von solcher Beschaffenheit zu finden, wie sie die anfängliche Gleichung fordert.

An Beispielen zu erläutern.

4. Die allgemeine Form gemischter quadratischer Gleichungen begreift auch die reinen unter sich, nämlich als den besonderen Fall, wenn $f = 0$ ist. Für dieselbe Voraussetzung geht auch die Formel für die Auflösung gemischter in die für die Auflösung reiner quadratischer Gleichungen über.

Auszuführen.

§. 83.

Zweites Verfahren, quadratische Gleichungen mit einer unbekannten Grösse aufzulösen.

Die Werthe der unbekannten Größe einer quadratischen Gleichung, welche man, wie überhaupt die Werthe der unbekannten Größe jeder Gleichung höheren Grades, auch die **Wurzeln der Gleichung** nennt, können auch noch auf einem anderen Wege gefunden werden, der hier vorzüglich deßhalb angeführt zu werden verdient, weil er von dem Gesichtspuncte ausgeht, unter welchen überhaupt die höhere Algebra ihre Aufgabe stellt.

1. Wird die allgemeine Form einer reinen quadratischen Gleichung $x^2 = g$ auf Null gebracht, $x^2 - g = 0$, so läßt sich die erste Seite derselben, indem man auch das bekannte Glied g als ein Quadrat, nämlich als $(\sqrt{g})^2$, ansieht, als das Product $(x + \sqrt{g}) \cdot (x - \sqrt{g})$ darstellen (Vergl. §. 12. 6 und §. 59. 4). Ein Product wird aber $= 0$, wenn einer seiner Factoren $= 0$ wird. Die Bedingung der Gleichung wird also erfüllt, wenn man

$$x + \sqrt{g} = 0,$$

und auch, wenn man $x - \sqrt{g} = 0$ setzt. Aus der ersten Annahme folgt, daß $x = -\sqrt{g}$, aus der zweiten, daß $x = +\sqrt{g}$ sei. Man erhält also dieselben beiden Werthe für x, welche oben (§. 81. 3) gefunden wurden.

Wäre g negativ, $x^2 = -g$, also $x^2 + g = 0$, so hätte man, um die vorige Form der Zerlegung beibehalten zu können, dafür

$$x^2 - (-g) = 0,$$

oder $$x^2 - (\sqrt{-g})^2 = 0$$

und $$(x + \sqrt{-g}) \cdot (x - \sqrt{-g}) = 0$$

setzen müssen, woraus wieder hervorgeht, daß $x = -\sqrt{-g}$ oder $x = +\sqrt{-g}$ anzunehmen wäre, mithin daß die Wurzeln dieser Gleichung imaginär sind.

2. Bringt man die allgemeine Form der gemischten quadratischen Gleichungen $x^2 + fx = g$ auf Null, $x^2 + fx - g = 0$; so kann man ebenfalls die erste Seite derselben als ein Product aus zwei Factoren ansehen, welche nur die erste Potenz der unbekannten

Größe enthalten, und deßhalb **einfache** oder Factoren **des ersten Grades** genannt werden. Man bezeichne diese Factoren mit $x + \alpha$ und $x + \beta$, so ist ihr Product $(x + \alpha) \cdot (x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$. Soll dieses mit der gegebenen Form übereinstimmen, so muß $\alpha + \beta = f$ und $\alpha\beta = -g$ sein. Man kennt also die Summe zweier Zahlen (f) und ihr Product (— g), und müßte, um die angedeutete Zerlegung wirklich vornehmen zu können, aus diesen Angaben die beiden Zahlen selbst finden. Dazu verhilft folgender Kunstgriff.

Aus $(\alpha + \beta) = f$ folgt

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = f^2$$

und, subtrahirt

$$\underline{4\alpha\beta \qquad = -4g}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = f^2 + 4g,$$

mithin

$$\alpha - \beta \qquad = \mp \sqrt{(f^2 + 4g)}$$

Diese Differenz zu der Summe $\alpha + \beta \qquad = f,$

addirt oder von ihr subtrahirt und das Resultat durch 2 dividirt, ergiebt sich

$$\alpha = \frac{f + (\mp \sqrt{(f^2 + 4g)})}{2}$$

und

$$\beta = \frac{f - (\mp \sqrt{(f^2 + 4g)})}{2}.$$

Wie die Wurzelgröße $\sqrt{(f^2 + 4g)}$, so ist auch die Differenz $\alpha - \beta$, deren Werth sie angiebt, als Resultat einer Wurzelausziehung zweideutig, und hätte können auch als $-(\alpha - \beta)$ oder $\beta - \alpha$ angesetzt werden. Es würde aber überflüssig gewesen sein, dieß anzudeuten.

Weßhalb? — Vergl. §. 82. 3.

Man erhält demnach anscheinend sowohl für α als für β zwei verschiedene Werthe, jenachdem man die Wurzelgröße $\sqrt{(f^2 + 4g)}$ das eine Mal positiv, das andere Mal negativ nimmt. Allein der erste Werth von α stimmt mit dem zweiten von β überein und umgekehrt, so daß die beiden Factoren, deren zweite Theile sie sind, $x + \alpha$ und $x + \beta$, in beiden Voraussetzungen doch dieselben werden und nur die Plätze wechseln.

Worin liegt der Grund, daß man, so lange nicht $f^2 + 4g = 0$ ist, sowohl für α als auch für β je zwei, wechselsweise übereinstimmende Werthe erhalten mußte? — (Man erwäge, aus was für Angaben dieselben abzuleiten waren.)

Man kann daher die Andeutung der Doppelsinnigkeit auch vor der Wurzelgröße $\sqrt{(f^2+4g)}$ weglassen, und die anfängliche Gleichung $x^2 + fx - g = 0$ mit der gleichgeltenden

$$\left(x + \frac{f + \sqrt{(f^2+4g)}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{f - \sqrt{(f^2+4g)}}{2}\right) = 0$$

vertauschen.

Durch Ausführung der angedeuteten Multiplication ist die Einerleiheit beider Gleichungen zu zeigen.

Und nun schließt man wie oben (Nro. 1): damit ein Product $= 0$ werde, muß einer seiner Factoren $= 0$ werden, und indem man dieß von jedem Factor fordert, dessen Werth von der gesuchten Zahl abhängt, erhält man eben so viele Bedingungen für die Bestimmung dieser Zahl. Damit also das vorliegende Product $= 0$ werde, muß entweder

$$x + \frac{f + \sqrt{(f^2+4g)}}{2} = 0, \text{ folglich } x = \frac{-f - \sqrt{(f^2+4g)}}{2}$$

oder $$x + \frac{f - \sqrt{(f^2+4g)}}{2} = 0, \text{ folglich } x = \frac{-f + \sqrt{(f^2+4g)}}{2}$$

sein.

3. Das Resultat ist dasselbe, wie bei der ersten Methode der Auflösung (§. 82. 2). Natürlich bleiben auch die Bedingungen dieselben, unter welchen die beiden Werthe der unbekannten Größe reell oder imaginär, von einander verschieden oder einander gleich werden. Die Gründe aber, weßhalb der eine oder andere Fall eintritt, lassen sich von dem Gesichtspuncte aus, unter welchen hier die Auflösung quadratischer Gleichungen gestellt ist, deutlicher, und zwar schon in der Beschaffenheit der gegebenen Gleichung nachweisen.

Die beiden Ausdrücke für x werden imaginär, wenn $f^2 + 4g$ negativ, also g in sich negativ und $4g > f^2$ oder $g > \frac{1}{4}f^2$ ist. Ob f positiv oder negativ ist, hat hierauf keinen Einfluß. Die gegebene Gleichung heißt also in diesem Falle

$$x^2 \mp fx + g = 0.$$

Ihre erste Seite ist als das Product der beiden Factoren $x + \alpha$ und $x + \beta$ anzusehen, wenn $-\alpha$ und $-\beta$ die beiden Wurzeln der Gleichung vorstellen, und $\mp f$ ist die Summe, $+ g$ das Product dieser Wurzeln. Das Product ist positiv, seine beiden Factoren müssen also einstimmig, beide positiv oder beide negativ sein. Sie sind wirkliche Bestandtheile (integrirende), nicht etwa bloß erzeugende Theile (§. 42. 2) der Summe $\mp f$. Nun ist aber das größte Product, welches aus zwei einstimmigen Theilen einer beliebigen Zahl entstehen kann, das Quadrat ihrer Hälfte, $(\frac{1}{2}f)^2$ oder $\frac{1}{4}f^2$. Denn je zwei ungleiche Theile dieser Zahl können allgemein durch $\frac{1}{2}f + z$ und $\frac{1}{2}f - z$ dargestellt werden, wenn $z < \frac{1}{2}f$ angenommen wird, und ihr Product ist $(\frac{1}{2}f + z) . (\frac{1}{2}f - z) = \frac{1}{4}f^2 - z^2 < \frac{1}{4}f^2$. Ist folglich mit Beibehaltung der vorigen Voraussetzung $g > \frac{1}{4}f^2$ so stellt die gegebene Gleichung eine Bedingung auf, welcher gar nicht genügt werden kann.

An Zahlenbeispielen zu beweisen.

Ist hingegen die anfängliche Gleichung $x^2 \mp fx - g = 0$, mithin das Product ihrer Wurzeln negativ, $- g$, so sind diese einander widerstreitende Zahlen und jedenfalls möglich. Denn das Product zweier einander widerstreitender Zahlen kann so groß oder so klein werden, als man will, wie groß oder wie klein auch ihre positive oder negative Summe, $(\mp f)$, angenommen werden mag.

An Zahlenbeispielen weiter auszuführen.

4. Die beiden Werthe der unbekannten Größe werden einander gleich, wenn $f^2 + 4g = 0$, oder $- g = \frac{1}{4}f^2$ ist. Denn in diesem Falle ist die Gleichung $x^2 \mp fx - g = 0$

mit $x^2 \mp fx + \frac{1}{4}f^2 = 0$

zu vertauschen, und nun ist ihre erste Seite das vollständige Quadrat einer zweitheiligen Wurzel, $(x \mp \frac{1}{2}f)^2 = (x \mp \frac{1}{2}f) . (x \mp \frac{1}{2}f)$.

5. Wird die anfängliche, auf 0 gebrachte Gleichung durch einen der Factoren, in welche ihre erste Seite zu zerlegen ist, dividirt; so muß die Division aufgehen, und der andere Factor als Quotient erscheinen.

An Zahlenbeispielen und an der allgemeinen Formel zu zeigen.

Wie läßt sich eine quadratische Gleichung bilden, deren beide Wurzeln vorgeschrieben sind?

Anmerk. Wie hier bei quadratischen, so wird überhaupt bei Gleichungen höheren Grades, nachdem sie auf Null gebracht sind, die Summe ihrer Glieder als ein Product aus lauter einfachen Factoren, und deren Bestimmung als das wesentliche Geschäft der Auflösung angesehen. Denn ist diese Zerlegung gelungen, so braucht man nur, um das ganze Product $= 0$ werden zu lassen, einen Factor nach dem andern $= 0$ zu setzen. Die Auflösung der dadurch erhaltenen einfachen Gleichungen giebt die Wurzeln der gegebenen.

Anhang zu §. 81., 82. und 83. Auflösung einiger Aufgaben, welche auf quadratische Gleichungen mit einer unbekannten Größe führen.

1. Ein frei fallender Körper legt im leeren Raume in der ersten Sekunde $15\frac{5}{8}$ Fuß Preuß. zurück, in 2 Secunden 4 mal, in 3 Sec. 9 mal so viel u. s. f. überhaupt in jeder anderen Zeit den genannten Raum so viel mal, als das Quadrat derjenigen Zahl anzeigt, welche diese Zeit in Secunden ausdrückt.

Die letztere durch t, den durchlaufenen Raum mit s bezeichnet, ist demnach $s = 15\frac{5}{8} . t^2$ (Fallgesetz). — Wie lange Zeit würde nun ein Körper gebrauchen, um ohne Widerstand und Hemmung durch einen Raum von 360 F. Pr. zu fallen?

Hier ist $s = 360$, also

$$15\frac{5}{8}t^2 = \frac{125}{8}t^2 = 360,$$

$$t^2 = \frac{360 . 8}{125} = \frac{576}{25}$$

$$\text{folglich } t = \sqrt{\frac{576}{25}} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} = 4{,}8.$$

Dieser Werth von t kann positiv und negativ, $\mp 4{,}8$, genommen werden; der negative hat aber hier keinen Sinn.

2. Die Größe eines Kreisringes soll 1000 Quadratzoll betragen, der Radius des inneren Kreises halb so groß sein, als der des äußeren: wie groß ist dieser zu nehmen?

Die Fläche eines Kreises, dessen Radius r Längen-Einheiten mißt, enthält $r^2 . \pi$, eines Kreises mit halb so großem Radius also $\frac{1}{4}r^2\pi$ gleichnamige Flächen-Einheiten, unter π das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie, $= 3{,}141592\ldots$, verstanden. Die Differenz beider Kreisflächen, d. i. die Fläche des gesuchten Kreisringes soll $= 1000$ Quadratzoll sein. Man hat also die Gleichung

$$r^2.\pi - \tfrac{1}{4}r^2.\pi = \tfrac{3}{4}r^2.\pi = 1000$$

oder $\tfrac{3}{4}.3{,}141592..r^2 = 2{,}356194..r^2 = 1000$

mithin $r^2 = 1000 : 2{,}356194.. = 424{,}413...$

und $r = \sqrt{424{,}413...} = 20{,}601..$ Zoll.

Auch in diesem Falle hat der negative Werth der Wurzel keinen Sinn.

3. Ein Rechteck von 80 Quadratfuß Flächeninhalt zu bilden, dessen Länge eben so viel über 8 Fuß, als die Breite weniger als 8 Fuß beträgt.

Bezeichnet man die Länge, um welche die größere Dimension mehr, die kleinere weniger als 8 Fuß betragen soll, mit x, so erhält man die Gleichung

$$(8+x).(8-x) = 80$$

oder $64 - x^2 = 80,$

woraus $x^2 = -16$

und $x = \mp\sqrt{-16} = \mp 4\sqrt{-1}$

folgen würde. — Ein Rechteck von der verlangten Beschaffenheit ist also unmöglich.

Dieses Ergebniß war auch schon nach dem Ansatze der Gleichung vorauszusehen. Man verlangt nämlich zwei Zahlen, deren Summe $[(8+x)+(8-x)] = 16$, deren Product $= 80$ sein soll. Das Product soll positiv, seine Factoren müssen folglich einstimmig sein. Da aber das größte Product, welches aus zwei einstimmigen Theilen einer Zahl entstehen kann, das Quadrat ihrer Hälfte ist (§. 83. 3), so wäre das größte Product, welches man aus zwei einstimmigen Theilen der Zahl 16 hätte erhalten können, $8^2 = 64$ gewesen: es sollte aber $= 80$ sein, was unmöglich ist.

4. Ein Rechteck soll $5\tfrac{3}{4}$ Fuß länger als breit sein und 1089 Quadratfuß enthalten: wie lang sind seine beiden Seiten zu nehmen?

Nennt man die kürzere Seite x, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks

$$x.(x+5\tfrac{3}{4}) = x^2 + 5\tfrac{3}{4}x = 1089,$$

folglich $x^2 + \frac{23}{4}x + \left(\frac{23}{8}\right)^2 = 1089 + \left(\frac{23}{8}\right)^2 = \frac{70225}{64}$

$$x + \frac{23}{8} = \mp\sqrt{\left(\frac{70225}{64}\right)} = \mp\frac{265}{8}$$

und entweder $x = +\frac{265}{8} - \frac{23}{8} = 30\tfrac{1}{4}$

oder $x = -\frac{265}{8} - \frac{23}{8} = -36.$

Nur der positive Werth $x = 30\frac{1}{4}$ kann als Antwort auf die Frage zugelassen werden, wonach die kürzere Seite der Figur $30\frac{1}{4}$, die längere 36 Fuß lang zu nehmen ist. Allein auch der negative $x = -36$ erfüllt die Bedingungen der Gleichung; denn ist $x = -36$, so ist $x + 5\frac{3}{4} = -30\frac{1}{4}$, und das Product $x.(x + 5\frac{3}{4}) = (-36).(-30\frac{1}{4}) = 1089$.

5. Die Dicke eines doppelt-converen (Linsen-) Glases zu bestimmen, dessen Breitendurchmesser 3 Zoll lang ist, und dessen Oberflächen beide Kugeln von 50 Zoll Halbmesser angehören.

Die halbe Dicke, welche x heißen mag, ist einer der beiden Abschnitte, in welche der Durchmesser eines Kreises von 50 Zoll Radius durch eine senkrecht gegen ihn gesetzte Sehne von 3 Zoll Länge getheilt wird. Bekanntlich aber ist die Hälfte dieser Sehne, 1,5 Zoll, die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des zugehörigen Durchmessers, x und $100 - x$, also

$$x : 1{,}5 = 1{,}5 : (100 - x)$$

oder $$100x - x^2 = 2{,}25$$

folglich $$x^2 - 100x + 2500 = 2500 - 2{,}25 = 2497{,}75$$

$$x - 50 = \mp\sqrt{2497{,}75} = \mp 49{,}9774949\ldots$$

und wenn diese Wurzel näherungsweise $= 49{,}977495$ gesetzt wird,

entweder $x = 50 + 49{,}977495 = 99{,}977495$

oder $x = 50 - 49{,}977495 = 0{,}022505$.

Offenbar werden durch diese Werthe die Längen der beiden durch die Sehne gebildeten Abschnitte des Kreisdurchmessers ausgedrückt: für den einen, x, den ersten Werth angenommen, erhält der andere, $100 - x$, den zweiten, und umgekehrt. Diese Zweideutigkeit der Auflösung ist eine nothwendige Folge des Umstandes, daß es im Ansatze der Gleichung unentschieden blieb, welchen Abschnitt x bezeichnen sollte.

Der Aufgabe genügt übrigens aus leicht begreiflichen Gründen nur der zweite Werth $x = 0{,}022505$, woraus sich die Dicke des beschriebenen Glases $2x = 0{,}04501$ oder nahe $= 0{,}045$ Zoll ergiebt.

Hätte man den Durchmesser eines Kreises wie eben 100 Z. und die Hälfte einer ihn senkrecht schneidenden Sehne 51 Z. lang angenommen; so würde man, um die Länge der durch sie gebildeten Abschnitte des Durchmessers zu bestimmen, die Gleichung

$$x.(100-x)=51^2=2601$$

und daraus $x^2-100x+2500=2500-2601=-101$

folglich $x-50=\mp\sqrt{-101}$

und $x=50\mp\sqrt{-101}$

erhalten haben. — Daß in diesem Falle der Ausdruck für x imaginär werden mußte, war vorher zu sehen. Denn wäre die halbe Sehne = 51 Z., so wäre die ganze = 102 Z., mithin größer als der Durchmesser des Kreises, 100 Z. Vermöge der Natur des Kreises kann aber eine Sehne desselben nie größer werden, als sein Durchmesser. — Arithmetisch gesprochen, rührt die Unmöglichkeit der Auflösung von der Annahme her, daß die mittlere Proportionale zwischen zwei (integrirenden) Theilen einer Zahl größer als die Hälfte derselben, oder daß das Product dieser Theile größer als das Quadrat der Hälfte sein sollte. (Vergl. Nro. 3.)

Wird die halbe Sehne dem halben Durchmesser des Kreises gleich (hier = 50 Z.) gesetzt, so werden auch, wie es die Natur des Kreises verlangt, die beiden Werthe von x, welche die Längen der im Durchmesser gebildeten Abschnitte ausdrücken, einander gleich.

Nachzuweisen.

Man setze ferner allgemein den Durchmesser des Kreises = 2r, die Sehne = s und erörtere auch in dieser Allgemeinheit die verschiedenen Fälle, welche sich in Absicht auf das Verhältniß von s zu 2r unterscheiden lassen.

6. **Die Tiefe einer Grube aus der Zeit zu bestimmen, welche von dem Augenblicke, wo man einen Stein in dieselbe fallen läßt, bis dahin verfließt, wo man den Schall des an den Boden anschlagenden Steines vernimmt**, wenn dabei auf den Widerstand, welchen die Luft dem fallenden Steine entgegensetzt, keine Rücksicht genommen wird.

Die Bewegung des fallenden Steines ist eine beschleunigte, deren Gesetz (Vergl. Nro. 1) durch die Gleichung $s=gt^2$ dargestellt wird, wenn s den durchlaufenen Raum, t die dazu verbrauchte Zeit, in Secunden ausgedrückt, und g den Fallraum der ersten Secunde, $=15\frac{5}{8}=15{,}625$ Fuß Preuß., bedeutet. Die Bewegung des Schalls ist gleichförmig; in der Luft legt derselbe durchschnittlich in jeder Sekunde 1058 Fuß Preuß. zurück; diese Geschwindigkeit heiße c. Angenommen also, zwischen dem Augenblicke, wo man den Stein fallen läßt, und dem, wo man den Schall des Anschlagens hört, verstreichen n Sekunden, und der

Stein habe in t Secunden den Boden erreicht, so bleiben für die Bewegung des Schalls vom Boden aufwärts n — t Secunden übrig, während welcher er $(n-t).c$ Fuß zurücklegt. Der Stein aber hat in t Secunden gt^2 Fuß durchlaufen. Beide Wege sind einander gleich. Man erhält also, um zunächst die Zeit zu bestimmen, welche der Stein zum Fallen verbraucht, die Gleichung $[s=]\ gt^2 = (n-t).c$

daraus $t^2 + \frac{c}{g}.t = \frac{nc}{g}$

ferner $t^2 + \frac{c}{g}.t + \frac{c^2}{4g^2} = \frac{nc}{g} + \frac{c^2}{4g^2} = \frac{4gnc+c^2}{4g^2}$

und $t = \frac{-c \mp \sqrt{(4gnc+c^2)}}{2g}$

Der zweite Werth von t, in welchem $\sqrt{(4gnc+c^2)}$ negativ genommen werden müßte, ist ausgeschlossen, weil er keine passende Auslegung zuläßt. Aus dem vorliegenden läßt sich nun die Größe des zu bestimmenden Raumes entweder nach der Formel gt^2 oder nach der Formel $(n-t).c$ berechnen.

Man überzeugt sich übrigens leicht, wenn man einmal für g und c die oben angegebenen Werthe und auch für n eine bestimmte Zahl, z. B. 5, setzt, daß diese Art der Bestimmung keine große praktische Brauchbarkeit hat. Man müßte nämlich t mindestens bis auf Tausendstel berechnen, wenn die genäherten Werthe von gt^2 und $(n-t).c$ nur einigermaßen übereinstimmen sollen. Die Beobachtung aber giebt die Zahl n, von welcher t abhängt, kaum auf 1 Zehntel genau. An ähnlicher Unsicherheit leidet überhaupt jede Bestimmung, welche von kleinen, nur näherungsweise richtigen Zahlen auf verhältnißmäßig große schließen soll.

Die hier angedeutete Rechnung ist auszuführen.

7. **Ein Stück Tuch kostet 72 Rthlr.; weil dasselbe aber 2 Ellen weniger enthält als es sollte, kommt die Elle 3/20 Rthlr. höher zu stehen. Wie viele Ellen enthält es?**

Nennt man die Zahl der Ellen, welche das Stück angeblich enthalten sollte, x, so werden die Bedingungen der Aufgabe durch die Gleichung $\frac{72}{x} = \frac{72}{x-2} - \frac{3}{20}$,

entwickelt: $x^2 - 2x - 960 = 0$,

ausgedrückt. Um dieselbe nach der zweiten, §. 83. 2 gelehrten Methode aufzulösen, sieht man sie als das Product

$$(x+\alpha).(x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

an. Man hat folglich $\alpha + \beta = -2$ und $\alpha\beta = -60$ zu setzen.

Nun ist $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = -4 \quad [=(-2)^2]$

$$\begin{array}{lrl}
\text{subtrahirt} & 4\alpha\beta & = 3840 \quad [=4.(-960)] \\
\hline
& \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 & = 3844 \\
\text{also} & \alpha - \beta & = 62 \; [=\sqrt{3844}] \\
\text{und da} & \alpha + \beta & = -2 \text{ ist} \\
\hline
& 2\alpha & = 60, \text{ folgl. } \alpha = 30, \\
\text{und} & 2\beta & = -64, \text{ folgl. } \beta = -32.
\end{array}$$

Die Gleichung $x^2 - 2x - 960 = 0$

stimmt demnach mit $(x+30).(x-32) = 0$

überein, und verlangt, daß entweder

$$x + 30 = 0, \text{ also } x = -30$$

oder $$x - 32 = 0, \text{ also } x = 32 \text{ sei.}$$

Nur der letzte Werth entspricht dem Sinne der Aufgabe. Das Stück Tuch hat also angeblich 32, in Wahrheit aber nur 30 Ellen enthalten.

§. 84.

Auflösung quadratischer Gleichungen mit mehr als einer unbekannten Grösse.

1. Eine Gleichung mit mehren unbekannten Größen kann allein zur Bestimmung derselben eben so wenig ausreichen, wenn sie von höherem Grade, als wenn sie einfach ist (§. 50). Um sie in Beziehung auf eine ihrer unbekannten Größen aufzulösen, müssen alle übrigen wie bekannte behandelt werden. Diese kommen also jedenfalls in dem für jene abgeleiteten Werthe wieder vor. Enthält die Gleichung nur zwei unbekannte Größen, so ergiebt die Auflösung in Beziehung auf jede einen Ausdruck, der nur noch eine, die zweite unbekannte Größe in sich schließt. Kommt also nur noch eine zweite, von der ersten unabhängige und ihr nicht widersprechende Gleichung hinzu, welche keine andere als die vorigen unbekannten Größen enthält, so kann entweder auch aus dieser ein Ausdruck für dieselbe unbekannte Größe wie aus der ersten abgeleitet, und der zweite dem ersten gleich gesetzt, oder es kann der aus der ersten Gleichung abgeleitete Werth der einen unbekannten Größe

statt ihres Zeichens in der zweiten gesetzt werden: auf die eine oder andere Art entsteht eine neue Gleichung, welche nur noch eine unbekannte Größe in sich schließt. Enthielte die zweite Gleichung nur eine der vorigen unbekannten Größen, so könnte sie zuerst für sich allein schon aufgelöst werden, und würde der Werth ihrer unbekannten Größe in der ersten Gleichung substituirt, so behielte auch diese nur noch eine unbekannte Größe und genügte zur Bestimmung derselben.

Ueberhaupt ist, wie man leicht übersieht, ebenso bei Gleichungen höheren Grades wie bei einfachen Gleichungen mit mehren unbekannten Größen das erste Geschäft der Auflösung, aus ihnen solche abzuleiten, in welchen nur je eine unbekannte Größe übrig bleibt, oder alle unbekannten Größen bis auf eine zu eliminiren. Dazu dienten bei einfachen Gleichungen verschiedene Methoden. Das Verfahren der Combination und der Substitution (§. **50**. **2** und **3**) kann ungeändert auch bei Gleichungen höheren Grades angewandt werden. So oft aber durch eins derselben eine unbekannte Größe fortgeschafft wird, erhält man unter der Bedingung, daß auch die abgeleiteten Gleichungen von einander unabhängig sein sollen, deren stets eine weniger, als man vor dieser Elimination hatte.

Rechtfertigung dieser Behauptung für die Annahme, daß die unbekannte Größe **1**) auf dem Wege der Combination oder **2**) auf dem Wege der Substitution fortgeschafft werden solle, und zwar a) in allen oder b) nicht in allen gegebenen Gleichungen vorkomme.

Die zunächst für die Auflösung einfacher Gleichungen (§. **51**. **4**) aufgestellte Forderung, daß eben so viele von einander unabhängige und einander nicht widerstreitende Gleichungen gegeben sein müssen, als unbekannte Größen durch dieselben bestimmt werden sollen, gilt daher von den Gleichungen aller Grade.

2. In Beziehung auf quadratische Gleichungen führt die vorige Betrachtung noch auf einen anderen Schluß. Sollen Gleichungen mit mehren unbekannten Größen keinem höheren als dem zweiten Grade angehören, so genügt es nicht, daß sie gehörig entwickelt, keine höhere Potenzen als die Quadrate der unbekannten Größen enthalten, sondern sie dürfen bis auf einzelne Ausnahmen überhaup in keinem Gliede mehr als zwei unbekannte Factoren enthalten. Denn gesetzt, in einem Gliede kämen mehr als zwei verschiedene unbekannte Factoren vor, und diese würden alle oder alle bis auf einen nach und nach durch das Verfahren der Substitution eliminirt; so träte an die Stelle jedes verdrängten Factors zuletzt ein auf dieselbe unbekannte Größe zurückgeführter Werth, so daß diese sich in jenem Gliede wenigstens eben so oft als Factor wiederholen müßte, als vorhin unbekannte Factoren in demselben vereinigt waren. Die abgeleitete Gleichung würde demnach einem höheren als dem zweiten Grade angehören, wenn nicht etwa nach gehöriger Entwickelung derselben alle Glieder mit Potenzen der unbekannten Größe behaftet wären, und die Grade der höchsten und niedrigsten unter ihnen um nicht mehr als 2 Einheiten von einander abwichen. Denn würde in diesem Falle die ganze Gleichung durch die niedrigste Potenz der unbekannten Größe dividirt, so bliebe in keinem Gliede eine höhere Potenz derselben als die zweite zurück.— Die Annahme, daß die Gleichungen mit mehren unbekannten Größen in keinem Gliede mehr als zwei unbekannte Factoren enthalten, schließt indessen, wie wir gleich sehen werden, noch keineswegs die Möglichkeit aus, daß die aus ihnen abzuleitenden Gleichungen auch zu einem höheren als dem zweiten Grade aufsteigen.

3. Die allgemeinste Form einer Gleichung mit zwei unbekannten Größen, welche in keinem Gliede mehr als zwei unbekannte Factoren enthält, ist

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Wird dazu eine zweite Gleichung von derselben Form,

$$gx^2 + hy^2 + ixy + kx + ly + m = 0,$$

gegeben, so könnte man, um zunächst aus beiden eine Gleichung mit einer unbekannten Größe abzuleiten, entweder jede in Beziehung auf dieselbe unbekannte Größe auflösen und die erhaltenen Ausdrücke einander gleich setzen, oder nur eine von ihnen in Beziehung auf eine ihrer unbekannten Größen auflösen und den erhaltenen Ausdruck in der anderen substituiren. In der abgeleiteten Gleichung würde jedenfalls nur noch eine unbekannte Größe vorhanden sein, aber in Wurzelgrößen verwickelt, deren Wegschaffung umständliche Operationen nöthig machen kann.

Auszuführen.

Bequemer gelangt man zu demselben Ziele auf folgendem Wege. Man eliminirt zuerst durch die Methode der Addition oder Subtraction (§. 50. 4) nur das Quadrat der fortzuschaffenden Größe. Die abgeleitete Gleichung enthält dieselbe folglich nur noch als einfachen Factor und kann in Beziehung auf sie wie eine einfache Gleichung aufgelöst werden. Den dadurch gefundenen Werth substituirt man in einer der gegebenen Gleichungen.

So findet man z. B., wenn aus den gegebenen Gleichungen x eliminirt werden soll, indem man die erste mit g, die zweite mit a multiplicirt, und nachher die zweite von der ersten subtrahirt:

$$(bg-ah)y^2+(cg-ai)xy+(dg-ak)x+(eg-al)y+(fg-am)=0$$

$$\text{mithin} \quad x=\frac{(ah-bg)y^2+(al-eg)y+(am-fg)}{(cg-ai)y+(dg-ak)}$$

Die Substitution dieses Werthes in einer der gegebenen Gleichungen bringt aber, wie man sich leicht auch ohne die wirkliche Ausführung überzeugt, eine Gleichung vom vierten Grade hervor.

Diese Substitution ist wirklich vorzunehmen und die erhaltene Gleichung zu entwickeln.

Nur wenn der Bruch, durch welchen x ausgedrückt wird, eine Division des Zählers durch den Nenner gestattet, so daß die Division aufgeht, und der Quotient keine höhere Potenz von y als die erste behält, wird, wenn nicht andere besondere Voraussetzungen in Betreff der gegebenen Gleichungen gemacht werden, der Grad der abgeleiteten nicht über den zweiten hinausgehen.

Im Wesentlichen zu demselben Ergebniß führt die Elimination von y. Die dabei abzuleitenden Ausdrücke unterscheiden sich von den vorigen nur darin, daß in ihnen die beiden unbekannten Größen x und y und die Coefficienten, welche gleichen Potenzen derselben in den Gliedern der nämlichen Gleichung angehören, mit einander verwechselt sind.

Welche Zeichen würden also namentlich mit einander zu vertauschen sein, um die vorigen Ausdrücke in diejenigen zu verwandeln, welche auf entsprechende Art bei der Elimination von y gefunden werden würden?

Diese Verwandlung ist wirklich vorzunehmen, und y auch auf demselben Wege wie vorhin x zu eliminiren, um die Uebereinstimmung der Resultate zu zeigen.

Soll daher die aus den gegebenen Gleichungen abgeleitete mit einer unbekannten Größe nicht von höherem als dem zweiten Grade sein; so müssen die gegebenen Gleichungen besonderen Voraussetzungen entsprechen. Jener Fall tritt z. B. ein, wenn a, b und c, oder wenn g, h und i $= 0$ sind, d. h. wenn eine der gegebenen Gleichungen eine einfache ist, oder wenn $a : g = b : h = c : i$, oder wenn a, g, c und i, oder b, h, c und i, oder f, m, d und k, oder f, m, e und $l = 0$ sind u. s. w.

Nachzuweisen.

Wie aber auch im einzelnen Falle die gegebenen Gleichungen beschaffen sein mögen, um sie zu den quadratischen zählen und ihre Auflösung auf die bisher gelehrten Methoden zurückbringen zu können, ist erforderlich, daß wenigstens eine der aus ihnen abzuleitenden Gleichungen mit einer unbekannten Größe eine quadratische, und keine derselben höheren als des zweiten Grades werde. Dieß vorausgesetzt, kann man entweder für jede der beiden unbekannten Größen durch Elimination der anderen eine eigene Gleichung ableiten und diese auflösen, oder auf solche Art nur die eine unbekannte Größe bestimmen, deren Werthe einen nach dem anderen, oder falls sie nur einen hat, diesen in einer der gegebenen Gleichungen substituiren, und dieselbe nach jeder Substitution auflösen. Das letzte Verfahren zeigt zugleich, wenn für jede der beiden unbekannten Größen zwei verschiedene Werthe gefunden werden, daß jedem Werthe der einen auch nur ein Werth der anderen entspricht, und welche zusammen gehören, während dieses bei dem ersten Verfahren durch Zurückgehen auf die gegebenen Bedingungen erst noch zu ermitteln ist.

In welchen Fällen läßt sich auch jetzt noch die Methode der Addition oder Subtraction zur Elimination einer unbekannten Größe anwenden, ohne andere vorbereitende Operationen als die früher (§. 50. 4) angegebenen nöthig zu machen? — Beispiele, in welchen sie durch neue Operationen der Art anwendbar wird (wie bei den Gleichungen $x^2 + y^2 = a$ und $cx - y = b$), und andere, in welchen sie überall nicht zureicht, (wie bei den Gleichungen $x^2 + xy + y^2 = a$ und $x - y = b$).

Passende Zahlen- und Buchstaben-Gleichungen vollständig aufzulösen: — wenn beide aus ihnen abgeleitete Gleichungen mit einer unbekannten Größe quadratische werden, oder wenn eine derselben eine einfache wird (z. B. $x^2 + ay = b$ und $cx^2 - dy = m$).

Auf wie vielerlei Art ließen sich die Werthe der einen und anderen unbekannten Größe zusammenstellen, wenn jede zwei verschiedene Werthe hat? — Welche derselben als zusammengehörige wirklich zulässig sind, ist in jedem einzelnen Falle nachzuweisen.

1. Anmerk. In einzelnen Fällen kann die abgeleitete Gleichung mit einer unbekannten Größe doch eine einfache werden, auch wenn die gegebenen das Ansehen quadratischer haben, so z. B. wenn aus den Gleichungen

$$1)\quad x - y = a$$
$$\text{und}\quad 2)\quad x^2 - y^2 = b$$

x oder y eliminirt wird. Denn substituirt man den aus der ersten Gleichung abgeleiteten Werth für x, nämlich $a + y$, in der zweiten, so erhält man

$$[a^2 + 2ay + y^2 - y^2 =]\, a^2 + 2ay = b$$

und substituirt man den aus jener Gleichung für y sich ergebenden Werth $x - a$ in der zweiten, so erhält man

$$[x^2 - (x^2 - 2ax + a^2) =]\, 2ax - a^2 = b,$$
$$\text{folglich}\ y = \frac{b - a^2}{2a}\ \text{und}\ x = \frac{b + a^2}{2a}.$$

Offenbar ist die zweite gegebene Gleichung ein Product der ersten und einer anderen, gleichfalls einfachen, welche man erhält, wenn man die zweite durch die erste dividirt. Die dadurch entstehende Gleichung

$$\left[\frac{x^2 - y^2}{x - y} =\right] x + y = \frac{b}{a}$$

drückt also eigentlich die zweite neue Bedingung aus, welcher die gesuchten Zahlen genügen sollen, und kann daher die zweite gegebene Gleichung vertreten. Auf den möglichst einfachen Ausdruck zurückgeführt, sind demnach beide gegebene Gleichungen einfache.

Zu zeigen, daß die aus dieser abgeleiteten und der ersten gegebenen Gleichung hervorgehenden Werthe von x und y mit den vorigen übereinstimmen.

2. Anmerk. Sind beide unbekannte Größen in jede der gegebenen Gleichungen auf ganz gleiche Weise verflochten, so daß es keinen Unterschied macht, wenn man ihre Zeichen durchgängig mit einander verwechselt, wie z. B. in den Gleichungen

$$x^2 + axy + y^2 = b\ \text{und}\ x + y = c,$$

so sind auch ihre Werthe einander gleich, und die beiden Werthe der einen die zusammengehörigen Werthe der einen und anderen, so daß, welchen von beiden Werthen man für die erste unbekannte Größe annimmt, allemal der zweite der entsprechende Werth der anderen ist. — Als einen Fall dieser Art kann man die schon oben §. 83. gelöste Aufgabe betrachten, zwei Zahlen (α und β), die entgegengesetzten Werthe der beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung, aus ihrer Summe ($\alpha + \beta = f$, bei reinen quadratischen Gleichungen $= 0$) und ihrem Producte ($\alpha . \beta = - g$) zu bestimmen.

Die Richtigkeit des Satzes an den genannten oder anderen Beispielen nachzuweisen.

4. Auch von Gleichungen mit mehr als zwei unbekannten Größen läßt sich erst während der Auflösung mit Sicherheit beurtheilen, ob sie quadratische sind. Der Gang der Auflösung ist übrigens derselbe, welchen die Auflösung einfacher Gleichungen mit mehren unbekannten Größen befolgt (Vergl. §. 51.). Zunächst ist aus den gegebenen eine neue Gleichung abzuleiten, welche nur noch eine unbekannte Größe enthält. Die Elimination der übrigen geschieht durch wiederholte Anwendung des Verfahrens, durch welches eine unbekannte Größe aus zwei Gleichungen fortgeschafft wird. Es bedarf dazu keiner neuen Vorschriften, so lange angenommen wird, daß die gegebenen Gleichungen, gehörig entwickelt, keine höhere als die zweiten Potenzen ihrer unbekannten Größen enthalten. Auf gleiche Weise kann man jede unbekannte Größe, welche in denselben vorkommt, in eine eigene Gleichung bringen, welche keine außer ihr enthält, und nur, wenn alle diese abgeleiteten Gleichungen quadratische oder auch zum Theil einfache, aber nicht von höherem als dem zweiten Grade sind, können die gegebenen selbst zu den quadratischen gezählt werden. — Dieß vorausgesetzt, findet man durch Auflösung sämmtlicher abgeleiteter Gleichungen die Werthe aller unbekannten Größen. Für diejenigen, welche durch quadratische Gleichungen bestimmt werden, bekommt man zwei in der Regel von einander verschiedene Werthe. Man hat also jetzt noch auszumachen, welche Werthe der ersten, zweiten, dritten unbekannten Größe u. s. f. zusammen den aufgestellten Bedingungen Genüge leisten. Dieß geschieht, indem man erst die Werthe von je zwei unbekannten Größen in einer Gleichung substituirt, welche nur diese enthält, und

untersucht, welche zusammen die Gleichung wahr machen, alsdann mit je zwei zusammengehörigen die Werthe einer dritten unbekannten Größe in eine Gleichung einführt, welche nur diese drei enthält, u. s. f.

Man kann aber auch zuerst nur eine der unbekannten Größen auf die vorhin bezeichnete Weise bestimmen, die Werthe derselben, sofern ihrer zwei sind, einen nach dem anderen in einer der vorhergehenden Gleichungen substituiren, welche nur noch eine zweite unbekannte Größe enthalten, und deren Werthe in beiden Voraussetzungen bestimmen — jeder Werth der zweiten ergiebt sich so als zu einem Werthe der ersten gehörig — alsdann je zwei zusammengehörige Werthe der beiden ersten unbekannten Größen in einer Gleichung einführen, in welcher außer ihnen nur noch eine dritte vorkommt, um nun auch diese in jeder Voraussetzung zu bestimmen u. s. f. — Bei diesem Verfahren fällt die Entscheidung, welche Werthe der verschiedenen unbekannten Größen zu einander gehören, mit ihrer Auffindung zusammen. Die Doppelwerthe derselben — denn mehr als zwei verschiedene Werthe kann bei der angenommenen Eigenthümlichkeit der gegebenen Gleichungen keine unbekannte Größe haben — treten von selbst in zwei Reihen aus einander, deren jede nur solche Werthe in sich aufnimmt, welche zusammen die aufgestellten Bedingungen erfüllen.

Was übrigens die Bedingungen betrifft, denen Gleichungen mit mehren unbekannten Größen genügen müssen, um quadratische zu sein, so verlohnt es sich nicht der Mühe, sie auch nur in den einfacheren Fällen vollständig aufzusuchen. Sie mehren sich mit der Zahl der unbekannten Größen und der zu ihrer Bestimmung gegebenen Gleichungen. Diese sind jedenfalls quadratische oder wenigstens nicht von höherem Grade, wenn nur eine derselben nach gehöriger Entwickelung Glieder mit zwei aber nicht mehr als zwei unbekannten Factoren enthält, und alle übrigen einfache sind. Es genügt aber nicht etwa, nur an jede Gleichung die Forderung zu stellen, daß in ihren Gliedern nicht mehr als zwei unbekannte Factoren vorkommen, und auf der anderen Seite können auch, wenn alle oder mehre der gegebenen Gleichungen Glieder mit zwei und selbst mit mehr als zwei unbekannten Factoren enthalten, die aus ihnen abgeleiteten Gleichungen mit je einer unbekannten Größe dennoch unter Umständen, alle oder einzelne, quadratische, ja sogar einfache werden.

Rechtfertigung dieser Behauptungen an Beispielen.
Vollständige Auflösung hierher gehöriger Aufgaben.

Anhang. Auflösung einiger Aufgaben, welche auf quadratische Gleichungen mit mehren unbekannten Größen führen.

1. **Zwei Reisende, A und B, gehen zu gleicher Zeit von zwei Oertern, C und D, ab, A von C nach D und B von D nach C. Als sie sich unterwegs treffen, hat B 18 Meilen mehr zurückgelegt als A und wird, wenn er mit gleicher Geschwindigkeit weiter reist, sein Ziel C in 3 Tagen erreichen, während A, wenn auch er mit derselben Geschwindigkeit, wie bisher, weiter reist, erst in $6\frac{3}{4}$ Tagen an dem Orte seiner Bestimmung, D, anlangen wird. Wie weit sind die beiden Oerter C und D von einander entfernt?**

Nennt man die Zahl von Meilen, welche A gemacht hat, als er mit B zusammentrifft, x, so hat dieser zu derselben Zeit $x+18$ Meilen gemacht, und bezeichnet man mit y die Zahl von Tagen, während welcher sie diese Wege zurückgelegt haben, so hat A täglich $\frac{x}{y}$, und B täglich $\frac{x+18}{y}$ Meilen gemacht. Nun soll A mit seiner Geschwindigkeit den Weg des B in $6\frac{3}{4}$, und B den Weg des A in 3 Tagen zurücklegen. Man erhält also, um zunächst x und y zu bestimmen, die Gleichungen

$$1.\quad \frac{x}{y}.6\tfrac{3}{4} = x + 18 \quad \text{oder} \quad 27x = (x+18).4y$$

$$\text{und}\quad 2.\quad \frac{x+18}{y}.3 = x \quad \text{oder} \quad (x+18).3 = xy.$$

Aus der 2ten Gleichung findet man $y = \frac{(x+18).3}{x}$ und durch Substitution dieses Werthes in der 1sten Gleichung

$$27x = (x+18).4.\frac{(x+18).3}{x} \quad \text{oder} \quad 9x^2 = 4.(x+18)^2.$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind vollständige Quadrate; anstatt also die Auflösung den gewohnten Weg gehen zu lassen, kann man gleich auf beiden Seiten die Wurzel ausziehen, wodurch man $3x = \mp 2(x + 18) = \mp 2x \mp 36$, mithin $x = 36$ oder $x = -7\frac{1}{5}$ erhält.

Diese Werthe sind auch auf dem gewöhnlichen Wege abzuleiten.

Substituirt man diese Werthe, einen nach dem anderen, in dem Ausdrucke für y, so findet man als entsprechende Werthe desselben

entweder $y = 4\frac{1}{2}$ oder $y = -4\frac{1}{2}$

Da nun die gesuchte Entfernung der beiden Oerter C und D von einander $= x + x + 18 = 2x + 18$ ist, so erhält man, jenachdem für x der erste oder zweite Werth genommen wird, die Größe derselben entweder $= 90$ oder $= 3\frac{3}{5}$ Meilen.

Offenbar genügen nur die ersten Werthe des x ($= 36$ Meilen), y ($= 4\frac{1}{2}$ Tage) und der genannten Entfernung ($= 90$ Meilen) den Bedingungen der Aufgabe. Die zweite Reihe von Werthen eben dieser Größen ($x = -7\frac{1}{5}$, $y = -4\frac{1}{2}$, die Entfernung von C bis D $= 3\frac{3}{5}$) ging daraus hervor, weil $\sqrt{(x + 18)^2}$ auch $= -(x + 18)$ gesetzt wurde. Diese Wurzel ist aber eigentlich nicht zweideutig, sondern nur positiv zu nehmen. Denn eine Quadratwurzel kann nur so lange als zweideutig angesehen werden, als nicht entschieden ist, ob das Quadrat, durch dessen Zerlegung sie gefunden wird, aus der positiven oder negativen Wurzel entstanden sei. Hier aber ist das zu zerlegende Quadrat, dem Sinne der Aufgabe gemäß, entschieden als aus einer positiven Wurzel $(x + 18)$ entsprungen dargestellt. Läßt man daher auch die negative Wurzel $-(x + 18)$ zu, so giebt man den einen bestimmten Sinn der Aufgabe auf und legt ihr einen allgemeineren unter.

Nach der ersten Auflösung ist der Ort C von D 90 Meilen entfernt und beim Zusammentreffen A von C gegen D hin 36 ($= x$), B von D gegen C hin 54 ($= x + 18$) Meilen fortgeschritten, und zwar in $4\frac{1}{2}$ ($= y$) Tagen, so daß A täglich 8 ($= 36 : 4\frac{1}{2}$), B täglich 12 ($= 54 : 4\frac{1}{2}$) Meilen gemacht hat, folglich jener die noch übrige Strecke von 54 Meilen in $6\frac{3}{4}$ ($8 . 6\frac{3}{4} = 54$), dieser die noch übrigen 36 Meilen in 3 Tagen ($12 . 3 = 36$) zurücklegen wird. — Nach der zweiten Auflösung ist C von D nur $3\frac{3}{5}$ Meilen entfernt, und beim Zusammentreffen A von C gegen D hin um $-7\frac{1}{5}$ ($= x$), also im entgegengesetzten Sinne oder von C aus rückwärts $7\frac{1}{5}$, und B von D gegen C um $10\frac{4}{5}$ ($= x + 18$) Meilen vorgerückt. Dieses Zusammentreffen fand $-4\frac{1}{2}$ ($= y$) Tage von der Zeit an gerechnet, wo sich A in C und B in D befand, also $4\frac{1}{2}$ Tage vor dieser Zeit statt. A hat täglich ($-7\frac{1}{5} : -4\frac{1}{2} =$) $+1\frac{3}{5}$ M., also $1\frac{3}{5}$ M. in dem Sinne von C gegen D hin, B täglich ($10\frac{4}{5} : -4\frac{1}{2} =$) $-2\frac{2}{5}$ M., d. h. $2\frac{2}{5}$ M. in der Richtung, welche der beim Ansatze angenommenen gerade entgegengesetzt ist, also ebenfalls in der Richtung von C auf D, zurückgelegt, und vermöge dieser Bewegungen werden A und B, jeder in der ihm bestimmten Frist vom Zeitpuncte des Zusammentreffens an, ihr Ziel erreichen. A nämlich wird in $6\frac{3}{4}$ Tagen $10\frac{4}{5}$ Meilen ($= 6\frac{3}{4} \,.\, 1\frac{3}{5}$ M.) vorwärts (von C gegen D) zurücklegen, also in D ankommen, und B in 3 Tagen $-7\frac{1}{5}$ M. ($= 3 \,.\, -2\frac{2}{5}$ M.) oder $7\frac{1}{5}$ M. der ihm beim Ansatze zugeschriebenen Richtung entgegen zurücklegen, also in C ankommen.

Um demnach beide Auflösungen zuzulassen, müßte die Aufgabe so gefaßt sein: zwei in derselben Linie gleichförmig bewegte Puncte A und B sind zu gleicher Zeit, jener im Orte C, dieser in D; wird der Fortschritt des Punctes B von D gegen C und des Punctes A von C gegen D hin als der positive angenommen, so ergiebt sich die Entfernung des Punctes, wo A und B zusammentreffen, von D dadurch, daß man seinen Abstand von C zu 18 M. (algebraisch) addirt, und von diesem Puncte gelangt A in $6\frac{3}{4}$ Tagen nach D, und B in 3 Tagen nach C: wie weit sind die Puncte C und D von einander entfernt?

Beide Auflösungen sind durch Zeichnungen anschaulich zu machen.
Verallgemeinerung der vorigen Aufgabe und ihrer Auflösung.

2. Die Höhe zweier auf einander gesetzter Würfel soll a Längen-Einheiten, und ihr körperlicher Inhalt b cubische, auf dasselbe Grundmaß bezogene Einheiten betragen: wie lang ist die Seite eines jeden Würfels?

Ist die Seite eines Würfels x Einheiten lang, so enthält derselbe x^3 gleichnamige cubische Einheiten. Man hat daher, die Länge der Seite des einen Würfels mit x, des anderen mit y bezeichnend, die beiden Gleichungen

$$1) \quad x + y = a$$
$$\text{und} \quad 2) \quad x^3 + y^3 = b.$$

Aus Gl. 1) folgt $y = a - x$, und diesen Werth in Gl. 2) substituirt, $x^3 + (a - x)^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 = b$, woraus sich $x = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{4b - a^3}{12a}\right)}$ ergiebt.

Dieselben beiden Werthe muß man auch für y finden, weil x und y in den gegebenen Gleichungen ohne Aenderung derselben mit einander verwechselt werden können. Dieß bewährt sich auch, wenn man die Werthe des x in dem Ausdrucke für y substituirt. Zugleich ergiebt sich daraus, daß mit jedem Werthe des x der andere als zugehöriger Werth des y zu verbinden ist; denn beide zusammen $(x+y)$ sollen $= a$ sein.

Trotz des Anscheins, als würden die aus den gegebenen Gleichungen abzuleitenden mit einer unbekannten Größe vom dritten Grade, werden dieselben doch nur quadratische. Diese Eigenthümlichkeit läßt sich auch auf folgende Weise klar machen. Wird die erste Gleichung zum Cubus erhoben

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = a^3,$$

davon die zweite $x^3 + y^3 = b$ subtrahirt,

und der Rest $3x^2y + 3xy^2 = a^3 - b$

durch die erste $x + y = a$ dividirt,

so kann die neue $3xy = \frac{a^3-b}{a}$

statt der vorigen zweiten gesetzt werden; und daß aus dieser und der ersten nur quadratische Gleichungen mit einer unbekannten Größe entspringen können, leuchtet auf den ersten Blick ein.

Substitution bestimmter Zahlen statt a und b. — Angabe der Bedingungen, unter welchen die Werthe von x (und y) reell, imaginäre Ausdrücke, oder einander gleich werden.

3. Aus Zahlen von der Form $a + \sqrt{b}$, vorausgesetzt, daß $\sqrt{b}$ irrational ist, die Quadratwurzel zu ziehen.

Diese Aufgabe hat nur den Zweck, die gesuchte Wurzel, wo möglich, einfacher und verständlicher als in der Form $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$ darzustellen. Die Wurzel aber, deren Quadrat $a + \sqrt{b}$ sein soll, muß mehr als einen Theil und wenigstens einen haben, der selbst schon eine irrationale Quadratwurzel ist. Enthielte sie außer diesem mehrere rationale Theile, so könnte man diese sämmtlich in einen zusammenziehen, und enthielte sie noch einen zweiten Theil, der ebenfalls eine irrationale Quadratwurzel wäre und sich mit dem ersten nicht in ein einfaches Glied zusammenziehen ließe, so könnte sie außer beiden überhaupt keinen Theil mehr enthalten. Man kann sie daher allgemein unter der Form $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ darstellen, wenn man annimmt, daß zwar der eine dieser Theile, nicht aber beide zugleich rational sein können.

Nun ist aber $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y$, und dieses Quadrat soll $= a + \sqrt{b}$ sein. Es müssen folglich sowohl die rationalen als auch die irrationalen Theile beider Zahlformen einander gleich sein:

$$1) \quad x + y = a$$

und $$2) \quad 2\sqrt{xy} = \sqrt{b} \text{ oder } xy = \tfrac{1}{4}b.$$

Aus diesen Angaben findet man sowohl x als $y = \frac{a \mp \sqrt{(a^2-b)}}{2}$, und die beiden in diesem Ausdrucke zusammengezogenen Werthe sind die zusammengehörigen Werthe von x und y. (Vergl. §. 83. und 2. Anmerk. zu §. 84. 3.) Demnach ist die gesuchte Quadratwurzel

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})} = \sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right)}.$$

Die zweite Form ist aber verwickelter als die erste, sofern nicht $\sqrt{(a^2-b)}$ rational, etwa $= c$, also

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})} = \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)} \text{ ist.}$$

Ihre Anwendung beschränkt sich deßhalb auch auf diesen Fall, in welchem sie der anfänglichen Form vorzuziehen ist.

Welche Form findet man für $\sqrt{(a-\sqrt{b})}$?

In welchen Fällen sind beide Theile der entwickelten Form reell, einander gleich, oder imaginär?

Was geschieht, wenn a negativ ist?

$\sqrt{(7+4\sqrt{3})} = ?$ $\sqrt{(5-\sqrt{24})} = ?$ $\sqrt{(2+\sqrt{3})} = ?$

$\sqrt{(\sqrt{27}+2\sqrt{6})} = ?$ [Man setze $\sqrt{27} = a$.]

$\sqrt{(ac^2+bd^2+2cd\sqrt{ab})} = ?$ $\sqrt{(x-2\sqrt{(x-1)})} = ?$

Die vorige Formel ist auch dann noch zulässig, wenn der zweite Theil des Ausdrucks, aus welchem die Wurzel gezogen werden soll, eine imaginäre Quadratwurzel ist, und führt unter Umständen auf einfachere Ausdrücke.

Was ist $\sqrt{(a\mp\sqrt{-b})}$?

$\sqrt{(23+\sqrt{-200})} = ?$ $\sqrt{(-2.(1+\sqrt{-3}))} = ?$

$\sqrt{(2\sqrt{-1})} = ?$ (Hier ist $a = 0$.)

4. Eine Zahl wird mit drei Ziffern geschrieben. Multiplicirt man nach und nach mit der höchsten, mittleren und niedrigsten Ziffer den nach Aufhebung derselben jedesmal übrig bleibenden Theil der Zahl, so erhält man in derselben Ordnung die Producte 86, 812 und 720. Wie heißt jene Zahl?

Bezeichnet man die drei Ziffern der gesuchten Zahl, von der höchsten anfangend, mit x, y und z, so werden die angegebenen Bedingungen durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{array}{llll} 1)\ x(10y + z) = 86 & \text{oder} & 1)\ 10xy + xz = 86 \\ 2)\ y(100x + z) = 812 & » & 2)\ 100xy + yz = 812 \\ 3)\ z(100x + 10y) = 720 & » & 3)\ 10xz + yz = 72. \end{array}$$

Aus Gl. 1) erhält man $z = \frac{86}{x} - 10y$, und wenn man diesen Werth in der 2ten und 3ten Gl. substituirt,

$$\text{aus Gl. 2)}\quad 100xy + \frac{86y}{x} - 10y^2 = 812$$

$$\text{und aus Gl. 3)}\ -100xy + \frac{86y}{x} - 10y^2 = -788.$$

Aus diesen Gleichungen y zu eliminiren, muß zuerst das mit y^2 behaftete Glied fortgeschafft werden, was durch Subtraction der unteren Gl. von der oberen geschehen kann. Dadurch findet man

$$200xy = 1600$$

folglich $$y = \frac{8}{x},$$

und wenn dieser Werth in der oberen oder unteren Gl. substituirt wird, $x^2 = 4$, folglich $x = \mp 2$.

Daraus ergiebt sich ferner $y = \mp 4$

und $z = \mp 3$,

so daß die drei positiven und die drei negativen Werthe zusammen gehören. Die letzteren sind hier ausgeschlossen, so daß die gesuchte Zahl $= 243$ ist.

Noch bequemer wäre folgender Weg der Auflösung. Man subtrahirt die dritte Gl. von der zweiten, um das Product yz zu eliminiren; die dadurch entstehende Gl. $10xy - xz = 74$ zu der ersten addirt und von ihr subtrahirt, giebt $20xy = 160$ und $2xz = 12$, folglich $y = \frac{8}{x}$ und $z = \frac{6}{x}$, und substituirt man gleichzeitig diese Werthe in einer der gegebenen Gleichungen, so findet man zunächst die beiden Werthe von x, und aus diesen die entsprechenden von y und z.

5. **Drei Zahlen sollen in stetiger geometrischer Proportion stehen; ihre Summe soll $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b$ sein: welche Zahlen sind es?**

Die angegebenen Bedingungen werden durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$1)\quad x : y = y : z \text{ oder } xz = y^2$$
$$2)\quad x + y + z = a$$
$$3)\quad x^2 + y^2 + z^2 = b$$

Aus Gl. 2 folgt $x + z = a - y$, und wenn man beide Seiten dieser Gl. zum Quadrat erhebt, $x^2 + 2xz + z^2 = a^2 - 2ay + y^2$, mithin wenn y^2 statt xz (nach Gl. 1.) gesetzt und das y^2 der zweiten Seite transponirt wird, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - 2ay$. Diese Gl. mit der dritten combinirt, giebt $a^2 - 2ay = b$, folglich $y = \frac{a^2 - b}{2a}$. Um nun auch x und z zu finden, hat man

$$x + z\,[= a - y] = a - \frac{a^2 - b}{2a} = \frac{a^2 + b}{2a}$$

und $xz\,[= y^2] = \frac{(a^2 - b)^2}{4a^2}$, woraus nach bekannten Regeln für x oder z der Werth

$$\frac{a^2 + b + \sqrt{(9a^2b - 3a^4 - 3b^2)}}{4a} = \frac{a^2 + b \mp \sqrt{(3a^2 - b)(3b - a^2)}}{4a}$$

abgeleitet wird.

Ableitungen dieses Werthes. — Welche Werthe von x und z gehören zusammen? — Zwischen welche Grenzen muß der Werth von b fallen, wenn die Aufgabe mögliche Resultate geben soll?

§. 85.

Gleichungen mit Wurzelgrössen, deren Auflösung auf die Auflösung quadratischer Gleichungen zurückgebracht werden kann.

Im Vergleich mit dem ganzen Gebiete der Algebra erscheint dasjenige, auf welches sich die bisher gelehrten Methoden der Auflösung einfacher und quadratischer Gleichungen erstrecken, freilich nur unbedeutend. Seine Grenzen sind indessen noch verschiedener Erweiterungen fähig, und es ist um so wichtiger, diese, so weit es auf dem gegenwärtigen Standpuncte angeht, kennen zu lernen, da mit dem vorliegenden Theile die Lehren der Algebra abgeschlossen werden sollen.

1. Im umfassendsten Sinne würde sich die Algebra die Aufgabe zu stellen haben, unbekannte Größen aus Gleichungen zu bestimmen, deren Seiten aus ihnen und bekannten Zahlen auf gesetzmäßige Art gebildete Zahlformen sind. Ihre vornehmste Aufgabe ist jedoch die Auflösung solcher Gleichungen, deren Glieder nur Potenzen der gesuchten Zahl mit ganzen positiven Exponenten enthalten.

Die allgemeine Form solcher Gleichungen würde

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots\ldots + px + q = 0$$

sein, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet.

Diese Form ist umfassender, als sie auf den ersten Blick zu sein scheinen könnte. Potenzen der gesuchten Zahl oder von ihr abhängiger Ausdrücke, deren Exponenten negative Zahlen wären, brauchen überall nicht berücksichtigt zu werden; denn sie lassen sich nach bekannten Regeln (§. 73. 1 und 4) in Potenzen mit positiven Exponenten umformen. B.

Gebrochene Glieder, deren Nenner Potenzen der gesuchten Zahl oder aus derselben gebildeter Ausdrücke enthielten, brauchen eben so wenig in ein allgemeines Schema von Gleichungen aufgenommen zu werden, weil sich jene Factoren des Nenners durch Multiplication der ganzen Gleichung mit ihnen aufheben lassen. B.

Unentwickelte Potenzen mehrgliedriger Ausdrücke, in welchen die gesuchte Zahl als Factor vorkommt, lassen sich, wenn ihre Exponenten ganze Zahlen sind, in Glieder von der angegebenen Form entwickeln. B.

2. Auch solche Gleichungen, deren Glieder einfach sind und Potenzen der gesuchten Zahl mit gebrochenen Exponenten — Wurzelgrößen, deren Grundfactor lediglich die gesuchte Zahl ist — in sich schließen, können auf die obige Form zurückgeführt werden. Man nehme eine Potenz dieser Zahl, deren Exponent ein Stammbruch ist und den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner der gegebenen Exponenten zum Nenner hat, — eine Wurzel der gesuchten Zahl, deren Grad der kleinste gemeinschaftliche Dividend aller vorkommenden Wurzelgrade ist, — vorläufig als das Gesuchte an und setze für dieselbe ein einfaches Zeichen. Die Potenzen der gesuchten Zahl, welche die Gleichung enthält, verwandeln sich dadurch sämmtlich in Potenzen dieser Wurzel mit ganzen Exponenten.

So geht z. B. die Gleichung $ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{1}{r}} = cx^2 - dx^p + f$,

wenn $x^{\frac{1}{nr}} = \sqrt[nr]{x} = y$ gesetzt wird,

in $ay^{mr} + by^n = cy^{2nr} - dy^{pnr} + f$ über,

und ist aus dieser y bestimmt, so findet man nachher $x = y^{nr}$.

Die Gleichung $x^2 - c\sqrt[3]{x} + d\sqrt[4]{x} = m\sqrt{x^3} + \sqrt[6]{x^5} + q$,
verwandelt sich, wenn $\sqrt[12]{x} = z$ gesetzt wird,
in $z^{24} - cz^4 + dz^3 = mz^{18} + z^{10} + q$,
und ist aus dieser z bestimmt, so ergiebt sich $x = z^{12}$.

Andere B.

Auf quadratische Gleichungen führt die bezeichnete Substitution, wenn die gegebene Gleichung nur die Quadratwurzel und die erste Potenz, oder zwei Wurzeln der gesuchten Zahl enthält, deren Grade sich zu einander wie 1 : 2 verhalten.

Aus $x - a\sqrt{x} = b$ entsteht, wenn $\sqrt{x} = y$ gesetzt wird, $y^2 - ay = b$, und aus $a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[2n]{x} = c$, wenn $\sqrt[2n]{x} = y$ gesetzt wird, $ay^2 + by = c$.

Andere Beispiele dieser Art und vollständige Auflösung derselben.

3. Dem Vorstehenden gemäß würden alle Gleichungen, deren Zusammensetzung keine andere Operationen als die vier einfachen Rechnungsarten, Potenzirung und Wurzelausziehung fordert, ohne jedoch die unbekannte Größe als Grad oder in dem Grade einer Potenzirung oder Wurzelausziehung zuzulassen, unter der oben aufgestellten Form $x^n + ax^{n-1} +$ &c. begriffen sein, wenn sich auch solche Gleichungen auf dieselbe zurückbringen ließen, in welchen Wurzelausziehungen aus zusammengesetzten Zahlformen verlangt werden, die, von der unbekannten Größe abhängig, nicht in ein einfaches Glied zusammengezogen werden können.

Enthält die Gleichung nur eine Wurzelgröße dieser Art, so wird sie entweder unmittelbar auf jene Form zurückgeführt, oder doch der Zurückführung auf dieselbe fähig, dadurch daß man die Wurzelgröße allein auf die eine Seite schafft und nun beide Seiten zur Potenz des Grades erhebt, den die aufzuhebende Wurzelausziehung hat.

An den Gleichungen

$$\sqrt{(ax+b)} - c = dx, \quad \sqrt[3]{\left(\frac{a}{x} - 1\right)} + 1 = mx^2,$$

$$dx^2 + \frac{\sqrt{(n-x^2)}}{2} = h\sqrt{(3n-3x^2)} + g \quad \text{u. a. auszuführen.}$$

Derselbe Zweck läßt sich in der angegebenen Voraussetzung auch dadurch erreichen, daß man statt des Grundfactors der Wurzelgröße ein einfaches Zeichen setzt*), den dieser Beziehung entsprechenden Ausdruck für die unbekannte Größe sucht und denselben in allen übrigen Gliedern der Gleichung statt ihres Zeichens substituirt, — wofern nämlich dieser Ausdruck sich in lauter einfache Glieder auflösen läßt und nicht etwa Wurzelgrößen von ähnlicher Form wie die wegzuschaffende (das neu eingeführte Zeichen als unbekannte Größe betrachtet) enthält.

Man setze z. B., um die Gl. $\sqrt{(ax+b)} - b = dx$ auf diese Weise umzuformen $ax + b = y$, folglich $x = \frac{y-b}{a}$.

Auch bei den übrigen vorhin gewählten Gleichungen ist zu versuchen, ob man auf dem angezeigten Wege zum Ziele gelangt.

Dieses Verfahren ist unter der angeführten Bedingung auch dann noch anwendbar, wenn die Gleichung Wurzeln gleichen Grades aus verschiedenen Potenzen, ja selbst wenn sie Wurzeln verschiedener Grade aus gleich hohen oder verschiedenen Potenzen eines und desselben mehrtheiligen Grundfactors enthält; — nur dürfen alsdann keine Wurzelgrößen mit einem anderen Grundfactor in derselben vorkommen.

So geht z. B. die Gleichung

$$a\sqrt{(bx-c)} + d\sqrt{(bx-c)^3} = e(bx-c) + x^2,$$

wenn $bx - c = y$ folglich $x = \frac{y+c}{b}$ gesetzt wird,

$$\text{in } a\sqrt{y} + d\sqrt{y^3} = ey + \frac{y^2+2cy+c^2}{b^2},$$

und diese wieder, wenn $\sqrt{y} = z$ gesetzt wird, in

$$az + dz^3 = ez^2 + \frac{z^4+2cz^2+c^2}{b^2} \text{ über,}$$

woraus durch weitere Entwickelung eine Gleichung von der oben auf-

*) Soll die Wurzel aus einer höheren Potenz des mehrtheiligen Grundfactors als der ersten gezogen werden (z. B. $\sqrt[3]{(bx-c)^2}$), so kann man auch für diese Potenz ein einfaches Zeichen einführen ($(bx-c)^2 = y$); zweckmäßiger ist es jedoch, bloß den Grundfactor, und zwar in seiner einfachsten Gestalt, als die zunächst gesuchte Größe durch ein eigenes Zeichen darzustellen.

gestellten Form entspringt. Und ist aus dieser z bestimmt, so wird $y = z^2$ und daraus $x = \frac{y+c}{b}$ gefunden.

Die Gleichung $a\sqrt[3]{(m-x^2)} + b\sqrt{(m-x^2)} - c\sqrt[3]{(m-x^2)^2} = 0$ verwandelt sich, wenn $m - x^2 = y$ gesetzt wird, in

$$a\sqrt[3]{y} + b\sqrt{y} - c\sqrt[3]{y^2} = 0,$$

und diese, wenn $\sqrt[6]{y} = z$ gesetzt wird, in

$$az^2 + bz^3 - cz^4 = 0 \text{ oder } a + bz - cz^2 = 0.$$

Ist alsdann z gefunden, so erhält man $y = z^6$ und $x = \sqrt{(m-y)}$.

Andere Beispiele.

4. Die weitere Untersuchung, ob und wie Gleichungen mit mehren Wurzelgrößen, deren mehrtheilige Grundfactoren von einander verschieden sind, auf die obige Form zurückgeführt werden können, mag auf solche Gleichungen beschränkt werden, deren Wurzelgrößen keine Wurzelausziehungen höheren als des zweiten Grades verlangen. Dabei sollen der Kürze halber Ausdrücke, in welchen die unbekannte Größe, x, oder beliebige Potenzen derselben als Factoren vorkommen, bloß aus bekannten Zahlen zusammengesetzte Glieder mit inbegriffen, durch X, X', X'' 2c. bezeichnet werden. Ohne vorgesetztes $\sqrt{}$ können daher diese Zeichen auch bloß bekannte Glieder bedeuten.

α. Eine Gleichung, welche nur zwei Wurzelgrößen der angegebenen Art enthält, kann demnach durch $a\sqrt{X} + b\sqrt{X'} = X''$ dargestellt werden. Ordnet man die Glieder dieser Gleichung auf die vorstehende Art oder so, daß eine Wurzelgröße allein auf der einen Seite erscheint, und erhebt dann beide Seiten zum Quadrat, so erhält man in der neuen Gleichung nur noch eine Wurzelgröße und zwar wieder nur vom zweiten Grade, und um diese wegzuschaffen, bringt man sie (nach Nro. 3) allein auf die eine Seite und erhebt abermals die ganze Gleichung zum Quadrat

Aus $a\sqrt{X} + b\sqrt{X'} = X''$ und aus $a\sqrt{X} = X'' - b\sqrt{X'}$
wird $a^2X + 2ab\sqrt{(XX')} + b^2X' = X''^2$ » $a^2X = X''^2 - 2bX''\sqrt{X'} + b^2X'$
folglich $2ab\sqrt{(XX')} = X''^2 - a^2X - b^2X'$ » $2bX''\sqrt{X'} = X''^2 - a^2X + b^2X'$
und $4a^2b^2XX' = (X''^2 - a^2X - b^2X')^2$ » $4b^2X''^2X' = (X''^2 - a^2X + b^2X')^2$

Weiter zu entwickeln.

Wäre zufällig XX' ein vollständiges Quadrat, so würde bei der ersten Anordnung des Verfahrens die zweite Erhebung zum Quadrat überflüssig.

Wäre $X'' = 0$, so erhielte man $a\sqrt{X} = -b\sqrt{X'}$, mithin

β. Hat eine Gleichung drei Wurzelgrößen der beschriebenen Art, so sind ihre Glieder so anzuordnen, daß zwei Wurzelgrößen allein auf die eine Seite kommen:

$$a\sqrt{X} + b\sqrt{X'} = c\sqrt{X''} + X'''.$$

Werden alsdann beide Seiten zum Quadrat erhoben, so entsteht auf jeder Seite nur eine ähnlich gebildete Wurzelgröße, und die weitere Behandlung der Gleichung richtet sich nach den so eben (unter α.) gegebenen Vorschriften.

Auszuführen.

Abgekürzt wird das Verfahren, wenn $X''' = 0$, oder wenn XX', XX'' oder $X'X''$ ein vollständiges Quadrat ist, sofern die beiden Glieder, welche die Quadratwurzeln aus den Factoren eines solchen Quadrats enthalten, zusammen auf die eine Seite der Gleichung gestellt werden.

γ. Eine Gleichung mit vier verschiedenen Wurzelgrößen der mehr erwähnten Art läßt die gewünschte Formveränderung ohne Ausnahme zu, wenn sie kein fünftes, nicht mit einer Wurzelgröße behaftetes Glied enthält. Man stelle auf jede Seite derselben zwei Glieder und erhebe darauf beide Seiten zum Quadrat, so bekommt die neue Gleichung nur zwei Wurzelgrößen und gestattet nun die Anwendung oben (unter α.) gegebener Vorschriften.

Auszuführen.

Hat aber die gegebene Gleichung noch ein fünftes Glied, so bekommen auch bei der günstigsten Anordnung ihrer Glieder (zwei auf der einen und drei auf der anderen Seite) die Quadrate ihrer beiden Seiten zusammen doch wenigstens wieder vier Wurzelgrößen, wenn nicht etwa das eine oder andere Product aus den Grundfactoren zweier gegebener Wurzelgrößen ein vollständiges Quadrat wird. Mit Ausnahme solcher Fälle können daher Gleichungen von der angenommenen Beschaffenheit nicht von ihren Wurzelgrößen befreit werden.

Dasselbe gilt aus leicht begreiflichen Gründen bis auf ähnliche Ausnahmen auch von solchen Gleichungen, welche fünf oder mehr verschiedene Wurzelgrößen der oben bezeichneten Art enthalten.

5. Die bisher beschriebenen Operationen, welche insgesammt der Gleichung nur eine entwickelte Gestalt zu geben bezwecken, würden ungeändert beibehalten werden können, wenn die mit X, X′ ꝛc. bezeichneten Ausdrücke selbst wieder Wurzelausziehungen aus mehrtheiligen Zahlformen verlangten. Nachher müßten aber auch diese aufgehoben werden, um die Gleichung vollständig zu entwickeln.— Daß übrigens auch die aus den zuletzt (Nro. 3 und 4) genannten

Umformungen hervorgehenden Gleichungen in besonderen Voraussetzungen quadratische werden können, mithin die Auflösung der gegebenen auf die Auflösung quadratischer Gleichungen zurückzubringen ist, fällt nicht schwer durch Beispiele zu beweisen.

Als ein solches hat sich das zweite bei Nro. 3 gebrauchte herausgestellt. Dieses und andere selbsterfundene sind vollständig aufzulösen.

Wie die (Nro. 2, 3 und 4) beschriebenen Formverwandlungen auf Gleichungen mit mehr als einer unbekannten Größe anzuwenden wären, bedarf keiner Anleitung.

§. 86.

Gleichungen höheren Grades, deren Auflösung auf die Auflösung quadratischer Gleichungen zurückgebracht werden kann.

1. Gleichungen mit einer unbekannten Größe, welche nur eine einzige Potenz derselben enthalten, können immer auf die Form $x^n = a$ gebracht werden, und ist dieses geschehen, so findet man $x = \sqrt[n]{a}$. Formell ist also jede Gleichung dieser Art auflösbar*); ob indessen die Auflösung vollständig alle Werthe der unbekannten Größe giebt, kann erst die Untersuchung entscheiden, ob die Zahlform, durch welche der Werth derselben ausgedrückt wird, $\sqrt[n]{a}$, nicht auch noch anderer Bedeutungen fähig sei, als ihr bisher untergelegt wurden; doch leuchtet ein, daß diese Zahlform wenigstens keine reelle Bedeutung außer den bisher erörterten oder unter anderen als den bekannten Bedingungen haben kann.

*) Was heißt das?

In welchen Fällen hat $\sqrt[n]{a}$ — wie man bisher den Ausdruck aufzufassen gelernt hat — einen, zwei oder gar keinen möglichen Werth? — B.

Mit Hülfe der Methoden, gemischte quadratische Gleichungen aufzulösen, lassen sich aber auch solche Gleichungen höheren Grades mit einer unbekannten Größe auflösen, welche nur zwei verschiedene Potenzen derselben enthalten, deren eine von doppelt so hohem Range als die andere ist. Die allgemeine Form, auf welche alle Gleichungen dieser Art gebracht werden können, ist nämlich

$$x^{2n} + ax^n = b,$$

und setzt man in derselben $x^n = y$, so erhält man $y^2 + ay = b$,

$$\text{mithin}\quad y = -\tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{(b + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$\text{und}\quad x = \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{(-\tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{(b + \tfrac{1}{4}a^2)})}.$$

Diesem Ausdrucke würde man, der gewohnten Auffassungsweise getreu, je nachdem n eine paare oder unpaare Zahl ist, vier oder zwei verschiedene Bedeutungen unterlegen. Die erhaltenen Werthe sind im ersten Falle entweder alle vier möglich, oder nur zwei möglich, zwei imaginär, oder alle vier imaginär, und im zweiten Falle entweder beide möglich oder beide imaginär.

Welche Werthe sind hier gemeint, und in welchen Voraussetzungen tritt der eine oder andere Fall ein? — B.

Die hier befolgte Methode der Auflösung braucht auch nicht einmal auf die Annahme beschränkt zu werden, daß n eine positive ganze Zahl sei. Wäre z. B n ein Bruch, $= \frac{m}{r}$, also die gegebene Gleichung

$$x^{\frac{2m}{r}} + ax^{\frac{m}{r}} = b;$$

so würde man zunächst $x^{\frac{m}{r}} = y$ setzen, und nachdem aus der durch diese Substitution gewonnenen Gleichung $(y^2 + ay = b)$ y bestimmt ist, $x = \sqrt[m]{y^r}$ finden. Ein Fall dieser Art ist schon im vorigen §. (Nro. 2 am Ende) betrachtet.

Die Auflösungsformel, wenn für n eine negative ganze oder gebrochene Zahl gesetzt wird.

Anmerk. Die höhere Algebra weist nach, daß jede Gleichung höheren Grades eben so viele (reelle oder imaginäre) Wurzeln, als ihr Grad Einheiten hat. Auf dem angezeigten Wege werden also nicht alle Wurzeln der Gleichung $x^{2n} + ax^n = b$ vollständig gefunden, außer wenn dieselbe vom vierten Grade $(n = 2)$ ist.

2. Auch die Auflösung von Gleichungen mit mehren unbekannten Größen, deren Grad den zweiten übersteigt, läßt sich in manchen Fällen auf die Auflösung quadratischer Gleichungen zurückführen. Dieß gelingt, abgesehen von denjenigen Fällen, wo die aus ihnen abgeleiteten Gleichungen mit einer unbekannten Größe

unter die vorhin betrachtete Form passen, zuweilen bloß schon durch eine geschickte Anordnung der Operationen, noch öfter aber dadurch, daß man nicht unmittelbar die Größen, nach welchen gefragt wird, sondern zuerst deren Summe, Differenz, Product, die Summe oder Differenz ihrer Quadrate u. s. f. überhaupt zuerst gewisse aus denselben zusammengesetzte Zahlformen, und nachher erst aus diesen die Werthe der unbekannten Größen selbst zu bestimmen sucht. Allgemeine Regeln lassen sich für diese Art der Auflösung nicht wohl geben. Es wird genügen, das Verfahren an einigen Beispielen zu erläutern.

α. Die gegebenen Gleichungen seien

$$1)\quad \frac{18x}{y} = \frac{8y}{x} \text{ oder } 9x^2 = 4y^2$$

$$\text{und}\quad 2)\quad 2xy + 3x - 5y = 30.$$

Wollte man aus der zweiten Gl. einen Werth für x oder y ableiten, und denselben in der ersten substituiren; so würde man in beiden Fällen eine vollständige Gleichung vierten Grades erhalten (in welcher alle Potenzen der unbekannten Größe von der vierten abwärts vorkommen). Löst man dagegen die erste Gl. in Beziehung auf x oder y auf, wodurch man $x = \mp {}^2\!/_3 y$ oder $y = \mp {}^3\!/_2 x$ enthält, und substituirt erst den einen, nachher den anderen Werth derselben unbekannten Größe in der zweiten Gl.; so wird diese in beiden Fällen nur eine quadratische, also nach bekannten Regeln auflösbar. Führt man z. B. für x den Werth $+ {}^2\!/_3 y$ in die genannte Gl. ein, so erhält man

$${}^4\!/_3 y^2 - 3y = 30, \text{ und daraus}$$

$$y = 6 \quad\text{oder}\quad y = -3\tfrac{3}{4}$$

$$\text{und}\quad x = 4, \text{ und } x = -2\tfrac{1}{3}.$$

Setzt man dagegen $x = -{}^2\!/_3 y$, so erhält man

$${}^4\!/_3 y^2 + 7y = -30, \text{ und daraus}$$

$$y = \frac{-21 \mp \sqrt{-999}}{8} \text{ und } x = \frac{-14 \mp \sqrt{-444}}{8}.$$

Die Gleichungen lassen demnach (wie es der Natur der Gleichungen vierten Grades angemessen ist) vier verschiedene Auflösungen zu.

Man setze in den gegebenen Gleichungen statt der Zahlen Buchstaben und wiederhole die Auflösung.

β. Das Product zweier Zahlen soll die Summe derselben um a, und die Summe ihrer Quadrate ihre Summe um b übertreffen: die Zahlen zu finden, welche diesen Bedingungen genügen.

Die Aufgabe verlangt, daß

$$1)\quad xy - (x+y) = a$$

und $$2)\quad x^2 + y^2 - (x+y) = b$$ sei.

Wollte man nun die erste Gl. in Beziehung auf x oder y auflösen und den gewonnenen Ausdruck in der zweiten einführen, so erhielte man wieder eine vollständige Gleichung vierten Grades. Statt dessen suche man erst die Summe und das Product beider Zahlen. Wird $x + y = s$ und $xy = p$ gesetzt, so bleibt, um die gegebenen Bedingungen bloß vermittelst dieser Zeichen darstellen zu können, nur noch auch $x^2 + y^2$ durch dieselben auszudrücken übrig. Nun ist aber

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = s^2$$

folglich $$x^2 + y^2 = s^2 - 2xy = s^2 - 2p.$$

Man erhält daher statt der obigen Gleichungen folgende:

$$\text{I.}\quad p - s = a$$

und $$\text{II.}\quad s^2 - 2p - s = b,$$

und aus diesen findet man ohne Schwierigkeit

$$s = \frac{3 \mp \sqrt{(8a+4b+9)}}{2} \text{ und } p = a + \frac{3 \mp \sqrt{(8a+4b+9)}}{2}$$

Aus $x + y = s$ und $xy = p$ folgt dann weiter

$$x = \frac{s + \sqrt{(s^2 - 4p)}}{2} \text{ und } y = \frac{s - \sqrt{(s^2 - 4p)}}{2},$$

oder umgekehrt.

Wie viele Werthe hat demnach jede der beiden unbekannten Größen? Man setze beispielsweise $a = 19$ und $b = 50$, und bestimme die entsprechenden Werthe von x und y sowohl durch Einführung jener Zahlen in die Auflösungsformeln als auch durch vollständige Ausführung des hier nur seinen Hauptzügen nach angedeuteten Verfahrens.

γ. Zwei Zahlen, x und y, von solcher Beschaffenheit zu finden, daß ihre Summe $= a$, und die Summe ihrer vierten Potenzen $= b$, in Zeichen: daß

$$1)\quad x + y = a$$

und $$2)\quad x^4 + y^4 = b$$ ist.

Man überzeugt sich leicht, daß weder x noch y unmittelbar anders als durch Auflösung einer Gl. vierten Grades gefunden werden kann. Dagegen läßt sich das Product beider Zahlen, xy, welches wieder mit p bezeichnet werden mag, durch eine quadratische Gl. bestimmen. Aus $x + y = a$ folgt nämlich

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = a^2$$

mithin $$x^2 + y^2 = a^2 - 2xy = a^2 - 2p$$

und $$(x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (a^2 - 2p)^2 = a^4 - 4a^2p + 4p^2$$

also $$x^4 + y^4 = a^4 - 4a^2p + 2p^2 = b.$$

Die Auflösung dieser letzten Gleichung giebt nun

$$p = xy = a^2 \mp \sqrt{(\tfrac{1}{2}(a^4 + b))},$$

und dazu $x + y = a$ genommen, findet man, abermals durch Auflösung einer quadratischen Gl., sowohl die Werthe von x als von y.

Welche? Welche derselben gehören zusammen? Wie viele verschiedene Auflösungen gestattet daher die Aufgabe?

Statt des Productes hätte man auch die Differenz der gesuchten Zahlen, $x - y$, vorläufig als unbekannte Größe, unter dem Zeichen d, einführen können. Die Auflösung hätte alsdann folgenden Weg einzuschlagen.

Aus $x + y = a$ folgt **I.** $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$
und aus $x - y = d$ » **II.** $x^2 - 2xy + y^2 = d^2$.

Die Gl. **II.** zu Gl. **I.** addirt und von Gl. **I.** subtrahirt, und die Summe durch 2, die Differenz durch 4 dividirt, erhält man,

III. $x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + d^2)$ und **IV.** $xy = \tfrac{1}{4}(a^2 - d^2)$
ferner **V.** $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = \tfrac{1}{4}(a^2 + d^2)^2$ » **VI.** $x^2y^2 = \tfrac{1}{16}(a^2 - d^2)^2$,
wenn beide Seiten jeder Gl. zum Quadrat erhoben werden. Aus Gl. **V.** ergiebt sich nun mit Zuziehung der Gl. **VI.**

$x^4 + y^4 = \tfrac{1}{4}(a^2 + d^2)^2 - 2x^2y^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + d^2)^2 - \tfrac{1}{8}(a^2 - d^2)^2$,
und wird der letzte Ausdruck, der Gl. 2 zufolge, $= b$ gesetzt und die neue Gl. gehörig entwickelt, so nimmt sie die Form

VII. $d^4 + 6a^2d^2 = 8b - a^4$ an.

Diese Gl. ist zwar vom vierten Grade, verwandelt sich aber, wenn man (nach Nro. 1 dieses §.) zuerst d^2 als die gesuchte Zahl annimmt, in eine quadratische. Aus ihr wird

$d^2 = -3a^2 \mp \sqrt{(8a^4 + 8b)}$, also $d = \mp \sqrt{(-3a^2 \mp \sqrt{(8a^4 + 8b)})}$
und alsdann aus $x + y = a$ und $x - y = d$ endlich
$x = \tfrac{1}{2}(a + d)$ und $y = \tfrac{1}{2}(a - d)$ gefunden.

Welchen Einfluß hat es auf die Bestimmung von x und y, ob man den Werth von d positiv oder negativ nimmt?

Welcher Werth (von d, mithin auch) von x oder y kann allein reell sein, und unter welcher Bedingung? Welchen Einfluß hat die Annahme, daß a, oder daß b negativ sei? — Diese Fragen sind auch unter Bezugnahme auf die erste Art der Auflösung zu beantworten.

Wiederholung beider Auflösungsmethoden an Beispielen, in welchen statt a und b bestimmte Zahlen gesetzt werden.

δ. Die Glieder einer geometrischen Proportion sollen nach folgenden Angaben bestimmt werden: das Product ihrer äußeren oder inneren Glieder ist $= a$, die Differenz der Summe ihrer äußeren und der Summe ihrer inneren Glieder $= b$, und die Summe der Quadrate aller vier Glieder $= c$.

Die gesuchte Proportion durch $x : y = v : z$ dargestellt, verlangt also die Aufgabe, daß

$$1)\quad xz = yv = a$$
$$2)\quad (x + z) - (y + v) = b$$
$$\text{und}\quad 3)\quad x^2 + z^2 + y^2 + v^2 = c \text{ sei.}$$

Aus diesen Gleichungen unmittelbar eine der unbekannten Größen zu bestimmen, würde man wieder eine Gl. vierten Grades aufzulösen bekommen. Diese zu umgehen, nehme man zuvörderst die Summe der äußeren Glieder, $x + z = s$, und die Summe der inneren Glieder, $y + v = s'$, als gesuchte Größen an. In dieser Bezeichnung heißt die 2te Gl. $s - s' = b$. Dieselbe Gl. zum Quadrat erhoben giebt:

$$x^2 + 2xz + z^2 - 2(x + z)(y + v) + y^2 + 2yv + v^2 = b^2,$$

und in dieser statt $x^2 + z^2 + y^2 + v^2$ der dritten Gl. zufolge c, statt xz und yv der ersten Gl. zufolge a, und für $x + z$ und $y + v$ die Zeichen s und s' gesetzt:

$$c + 4a - 2ss' = b^2.$$

Damit die Gleichung $s - s' = b$ verbunden, findet man nach bekannten Regeln

$$s = \frac{\mp\sqrt{(8a+2c-b^2)}+b}{2} = x + z \text{ und } s' = \frac{\mp\sqrt{(8a+2c-b^2)}-b}{2} = y + v.$$

Nunmehr ist die anfängliche Aufgabe auf die schon mehrfach gelöste zurückgebracht, aus der Summe und dem Producte zweier Zahlen die Zahlen selbst zu finden: es würde also überflüssig sein, bei ihrer Lösung zu verweilen.

Die endliche Auflösung ist nebst erläuternden Bemerkungen über die Anzahl, die Bedingungen der Möglichkeit, den gegenseitigen Austausch der gefundenen Werthe ꝛc. hinzuzufügen, und das ganze Verfahren an Beispielen, in welchen statt der Buchstaben a, b und c bestimmte Zahlen gewählt werden, zu wiederholen.

Vielfache Uebung in der Auflösung ähnlicher Aufgaben.

§. 87.

Exponential- und logarithmische Gleichungen, deren Auflösung auf die bisher gelehrten Methoden zurückgebracht werden kann.

1. Bisher wurden nur solche Gleichungen in Betrachtung gezogen, welche die unbekannten Größen in keinen anderen Verbindungen enthalten, als durch die vier einfachen Rechnungsarten, Potenzirung und Wurzelausziehung — vorausgesetzt, daß die Grade

der beiden zuletzt genannten Operationen bekannte Zahlen sind — gestiftet werden. Man nennt sie algebraische Gleichungen im engeren Sinne; solche dagegen, in welchen die unbekannten Größen oder von ihnen abhängige Zahlformen als Exponenten von Potenzen vorkommen, Exponential-Gleichungen, und solche, in welchen Logarithmen unbekannter Größen oder aus denselben zusammengesetzter Zahlformen gefordert werden, logarithmische Gleichungen. B.

Die beiden letzteren Arten zählt man zu den transcendenten Gleichungen, — ein Name, unter welchem man, im Gegensatze zu den algebraischen, alle nicht algebraischen Gleichungen zusammenfaßt. Die Mannigfaltigkeit der letzteren wird nämlich noch durch einige erst später in die Arithmetik einzuführende Zahlformen vermehrt.

Unter gewissen Bedingungen läßt sich die Auflösung von Exponential- und logarithmischen Gleichungen auf die Auflösung algebraischer zurückführen. Die Angaben, wann und wie dieses geschehen kann, mögen auf Gleichungen mit einer unbekannten Größe beschränkt bleiben.

2. Sollen Exponential-Gleichungen mit einer unbekannten Größe in algebraische umgestaltet werden können, so dürfen sie die unbekannte Größe durchaus an keiner anderen Stelle außer im Exponenten enthalten und müssen, unter X jeden beliebigen aus der unbekannten Größe, x, und bekannten Zahlen in der Art und Weise wie die Seiten algebraischer Gleichungen zusammengesetzten Ausdruck oder auch x selbst, und unter b und c beziehungslose Zahlen verstanden, entweder die Form $b^X = c$ schon besitzen oder doch der Zurückführung auf dieselbe fähig sein. Die Umgestaltung selbst geschieht alsdann dadurch, daß man von beiden Seiten der Gleichung die Logarithmen (natürlich desselben Systems) nimmt. Man erhält so die neue Gleichung

$$X \,.\, \log.b = \log.c,$$

und da die Logarithmen gegebener und zwar beziehungsloser Zahlen selbst als bekannte Zahlen anzusehen sind, so hängt es bloß von der Beschaffenheit des durch X bezeichneten Ausdrucks ab, ob sich die Gleichung nach den bisher entwickelten Methoden auflösen läßt.

Die Eigenschaften, welche das Schema $b^X = c$ von der Gestalt einer Gleichung fordert, sind nebst den Gründen, weßhalb sie für den vorliegenden Zweck nothwendig zu fordern sind, anzugeben — und die Gleichungen $4^{2x} = 18$, $ab^{3x^2-1} = c$, $24 . 2^{x+\sqrt{x}} = 1000$, $10^{3x^2} = 50 . 100^x$, $ab^x = cb^{x-1} + 1$ u. a. vollständig aufzulösen.

Gleichungen von der Form $b^X = cd^{X'}$ lassen sich auf die vorige zurückführen, — man drückt nämlich d als Potenz von b aus, $d = b^\delta$, und erhält dann

$$b^X = c . b^{\delta X'}, \text{ folglich } b^X : b^{\delta X'} = b^{X - \delta X'} = c,$$

oder man drückt b als Potenz von d aus und verfährt auf ähnliche Weise, — sie können aber auch unmittelbar in Gleichungen der ersten Art dadurch verwandelt werden, daß man von beiden Seiten die Logarithmen nimmt. Dieß giebt

$$X . \log. b = \log. c + X' . \log. d.$$

B.

Exponential-Gleichungen, welche mehr Glieder als eins auf jeder Seite haben, vorausgesetzt, daß alle Theile, welche die nämliche Potenz enthalten, stets in ein Glied zusammengezogen sind, können bei der Annahme, daß die unbekannte Größe nur in den Exponenten dieser Potenzen vorkommt, durch das Schema

$$b^X + cd^{X'} + ef^{X''} + \text{ꝛc.} = a,$$

aber eben so allgemein auch durch die Form

$$b^X + cb^{X'} + eb^{X''} + \text{ꝛc.} = a$$

ausgedrückt werden.

Worin unterscheidet sich die zweite Form von der ersten? und wodurch kann aus jener diese abgeleitet werden?

Die letzte Form angenommen, läßt ihre Auflösung sich nur in dem einen Falle auf die Methoden zurückbringen, nach welchen algebraische Gleichungen aufzulösen sind, wenn $X' = nX$, $X'' = rX$ ist u. s. w. Alsdann erhält man nämlich aus der Gleichung

$$b^X + cb^{nX} + eb^{rX} + \text{ꝛc.} = a,$$

indem man $b^X = z$ setzt, die neue

$$z + cz^n + ez^r + \text{ꝛc.} = a,$$

und ist aus dieser z bestimmt, so läßt sich zur Auffindung von x das vorhin beschriebene Verfahren anwenden.

$$2 \,.\, 10^x + 8 \,.\, 100^{x - 3/2} - 1000^{\frac{x}{3}} = 400;$$
$$2 \,.\, 16^{x(2-x)} + 16^{2x(2-x)} = 48 \quad \text{u. a. B.}$$

3. Logarithmische Gleichungen mit einer unbekannten Größe lassen sich in algebraische nur dann umformen, wenn die unbekannte Größe ausschließlich in denjenigen Zahlformen vorkommt, deren Logarithmen gefordert werden, und wenn sie die Form

$$\log. X = a$$

entweder bereits haben, oder doch auf dieselbe zurückgeführt werden können*) — unter a jede beliebige reelle, positive oder negative Zahl verstanden. In diesem Falle ist die gegebene Gleichung, wenn, wie gewöhnlich, 10 als Basis des verlangten Logarithmen angenommen wird, gleichbedeutend mit $X = 10^a$.

(Aus $\log. X \,.\, \text{bas.}\, b = a$ würde $X = b^a$ folgen.)

Da nun 10^a (oder b^a) einen nach bekannten Regeln zu berechnenden Werth hat, so hängt es lediglich von der Beschaffenheit des durch X bezeichneten Ausdrucks ab, ob die Gleichung sich nach den bisher entwickelten Methoden auflösen läßt.

*) Begründung dieser Behauptung. — B.

Die Gleichung $\log. X + n \,.\, \log. X' - r \,.\, \log. X'' \mp$ ꝛc. $= a$ stimmt bekanntlich mit $\log. \left(\frac{X \,.\, X'^n \ldots}{X''^r \ldots}\right) = a$ überein. Gleichungen dieser Form sind also mit unter der obigen begriffen. B.

Die Gleichung $(\log. X)^n + a(\log. X)^r + b(\log. X)^s +$ ꝛc. $= k$ verwandelt sich dadurch, daß man $\log. X = z$ setzt, in die algebraische $z^n + az^r + bz^s +$ ꝛc. $= k$, und läßt sich aus dieser z bestimmen, so hat man ferner, um x zu finden, die Gleichung $X = 10^z$ aufzulösen. B.

Sechzehnter Abschnitt.

Von den arithmetischen und geometrischen Reihen (Progressionen).

§. 88.

Die arithmetische Reihe.

1. Aus der großen Zahl von Anwendungen, welche die bisher vorgetragenen Lehren gestatten, heben wir ihrer practischen Wichtigkeit wegen nur noch eine hervor, die Theorie der sogenannten **arithmetischen und geometrischen Reihen** oder **Progressionen**.

Reihe oder **Progression** nennt man im Allgemeinen jede Folge mehrer Zahlen, die nach einem gemeinschaftlichen Gesetze gebildet sind, so daß jede von ihnen, wenn dieses Gesetz bekannt ist, bloß durch die Angabe, die wie vielte sie sei, bestimmt wird. Diese Zahlen selbst nennt man **Glieder** der Reihe.

Die einfachsten Reihen entstehen ohne Frage dadurch, daß man zur Bildung jedes neuen Gliedes am vorhergehenden dieselbe einfache Rechnungsart mit der nämlichen zweiten Zahl vornimmt. Da aber die Subtraction einer Zahl auch als Addition der entgegengesetzten, die Division durch eine Zahl auch als Multiplication mit ihrem umgekehrten Werthe angesehen werden kann; so reicht es hin, als diesem Gesetze folgend, zwei besondere Arten von Reihen zu unterscheiden: solche, in welchen jedes folgende Glied durch **Addition** derselben Zahl zum vorhergehenden, und solche, in welchen jedes folgende durch **Multiplication** des vorhergehenden mit derselben Zahl entspringt. Jene Reihen hat man **arithmetische**, diese

geometrische genannt, — offenbar, weil je zwei auf einander folgende Glieder einer Reihe der ersten Art dasselbe arithmetische, einer Reihe der zweiten Art dasselbe geometrische Verhältniß zu einander haben. (Vergl. §. 52. 1.) Nur von diesen beiden Arten von Reihen soll hier die Rede sein. W.

2. Die **arithmetische Reihe** hebt mit einem beliebigen Gliede, dem **Anfangsgliede**, a, an; das nächste Glied erhält man dadurch, daß man zu jenem eine andere willkürlich gewählte Zahl, d, die **Differenz** (oder den **Exponenten**) der Reihe addirt, a + d, und jedes folgende, indem man immer wieder zu dem vorhergehenden die nämliche Differenz d zulegt. In jedem späteren Gliede ist folglich nebst dem Anfangsgliede die Differenz der Reihe einmal weniger enthalten, als die Zahl des Gliedes anzeigt: das nte Glied ist $= a + (n-1)d$, und das allgemeine Schema der Reihe:

$$\underbrace{a}_{1},\quad a\underbrace{+}_{2}d,\quad a\underbrace{+}_{3}2d,\quad a\underbrace{+}_{4}3d,\quad \ldots\quad a+(\underbrace{n}_{n}-1)d.$$

a und d können beliebige, ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen sein. Ist d positiv (oder additiv), so nennt man die Reihe **steigend**, im Gegentheil, wenn d negativ (oder subtractiv) ist, **fallend**. W.

Bezeichnet man den berechneten Werth des nten Gliedes einer arithmetischen Reihe mit u, so wird durch die Gleichung

$$\text{I.}\quad u = a + (n-1)d$$

eine Beziehung zwischen den vier Zahlen u, a, n und d ausgedrückt, welche jede derselben zu finden gestattet, wenn die drei anderen gegeben sind.

Nach welchen Formeln? — W. Was für Werthe sind für n ausschließlich zulässig?

Sollen zwei Zahlen, a und u, als erstes und letztes Glied einer arithmetischen Reihe angenommen, und zwischen dieselben n andere Glieder eingeschaltet, — oder wie es die Kunstsprache nennt, **interpolirt** — werden; so hat man $\frac{u-a}{n+1}$ als Differenz zu nehmen und diese wiederholt zu a zu addiren oder von u zu subtrahiren, um die Zwischenglieder zu finden.

Weßhalb? — W.

3. Sehr oft wird die Summe sämmtlicher Glieder einer arithmetischen Reihe (oder einer bestimmten Anzahl derselben) verlangt, und es entsteht die Frage, ob sich dieselbe nicht auf kürzerem und bequemerem Wege berechnen läßt, als durch gewöhnliche Addition.

Nun ist aber vom Anfange herein jedes folgende Glied der Reihe um die Differenz größer oder kleiner, und vom Ende gerechnet jedes folgende um dieselbe Differenz kleiner oder größer als sein zunächst vorhergehendes, so daß die Summe je zweier Glieder, welche gleich weit vom Anfang und Ende der Reihe abstehen, immer dieselbe, und zwar eben so groß ist, wie die Summe des ersten und letzten Gliedes. Bei einer paaren Anzahl von Gliedern enthält also die Summe sämmtlicher Glieder der Reihe die Summe des ersten und letzten so viel mal, als Gliederpaare, oder halb so oft, als Glieder vorhanden sind. Und hat die Reihe eine unpaare Anzahl von Gliedern, so ist das mittelste, als arithmetisches Mittel zwischen den beiden benachbarten, der Hälfte ihrer Summe, also auch der halben Summe des ersten und letzten Gliedes gleich und kann als halbes Paar zu dem Betrage der übrigen gerechnet werden. In beiden Fällen erhält man demnach die Summe aller Glieder einer arithmetischen Reihe, indem man die Summe des ersten und letzten mit der halben Anzahl aller Glieder multiplicirt — in Zeichen, wenn s die Summe

$$a + (a + d) + (a + 2d) \dots . + (a + (n - 1)d),$$

und wie vorhin u das nte Glied bedeutet, so ist

$$\text{II.}\quad s = (a + u) \cdot \frac{n}{2}$$

oder $$\text{III.}\quad s = (2a + (n - 1)d) \cdot \frac{n}{2} \left[= na + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d\right].$$

Beide Formeln lassen sich leicht auch so umgestalten, daß je eine der drei im Werthe von s vorkommenden Zahlen (a, u oder n in II. und a, d oder n in III.) durch die beiden anderen und s ausgedrückt erscheint.

Alle diese Umformungen sind wirklich vorzunehmen. (Nur um n aus der zweiten Formel zu bestimmen, ist die Auflösung einer gemischten quadratischen Gleichung, sonst immer nur einer einfachen Gleichung mit einer unbekannten Größe erforderlich.) — Anwendungen auf bestimmte

Zahlenreihen, — auch solche, deren Glieder zum Theil positiv, zum Theil negativ sind. (Auch 0 kann als Glied einer arithmetischen Reihe vorkommen.)

Zu beweisen, daß die Summe der n ersten ungeraden Zahlen $1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1) = n^2$ ist. (Anwendung auf das Fallgesetz.)

Verwickeltere Aufgaben, deren Lösung die Kenntniß des Inhalts dieses §. voraussetzt.

§. 89.

Die geometrische Reihe.

1. Die geometrische Reihe kann, wie die arithmetische, jede beliebige Zahl, a, (nicht 0) zum Anfangsgliede haben: durch Multiplication desselben mit einer gleichfalls willkürlich gewählten, jedoch absoluten Zahl, e, außer 1, entsteht das nächste Glied, und jedes folgende durch Multiplication des vorhergehenden mit derselben Zahl, e, dem Exponenten der Reihe. Jedes spätere Glied der geometrischen Reihe ist daher ein Product des Anfangsgliedes und einer Potenz des Exponenten, deren Grad eins kleiner als die Zahl des Gliedes ist: das nte Glied ist $= ae^{n-1}$ und das allgemeine Schema einer geometrischen Reihe:

$$\overset{1}{\overbrace{a}},\ \overset{2}{\overbrace{ae}},\ \overset{3}{\overbrace{ae^2}},\ \overset{4}{\overbrace{ae^3}} \ldots\ldots \overset{n}{\overbrace{ae^{n-1}}}.$$

Ist der Exponent $e > 1$, so wird die Reihe eine steigende, und ist $e < 1$ (ein echter Bruch), eine fallende genannt.

Weßhalb? B. — Weßhalb ist 1 als Exponent der Reihe ausgeschlossen?

Wird der berechnete Werth des nten Gliedes durch u bezeichnet, so erhält man

$$\text{I. } u = ae^{n-1}, \text{ und daraus}$$

$$\text{II. } a = \frac{u}{e^{n-1}},\ \text{III. } e = \sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)} \text{ und IV. } n = \frac{\log.u - \log.a}{\log.e} + 1.$$

Ableitung der letzten drei Formeln aus der ersten. — B.

Sollen zwischen zwei Zahlen, a und u, als Endglieder einer geometrischen Reihe n andere eingeschaltet (interpolirt) werden, so hat man $\sqrt[n+1]{\left(\frac{u}{a}\right)}$ als Exponent der Reihe zu nehmen und mit diesem entweder das erste Glied a wiederholt zu multipliciren oder das letzte u zu dividiren.

Begründung der Regel. — B.

2. Die Summe sämmtlicher Glieder einer geometrischen Reihe

läßt sich, auch ohne jedes einzelne zu kennen, und meistens dann bequemer als durch Berechnung aller und wirkliches Zusammenzählen derselben, bloß aus der Angabe ihres Anfangsgliedes, des Exponenten und der Zahl der Glieder berechnen. Die Formel, nach welcher dieß geschehen kann, ist auf folgende Art abzuleiten. Man setze die gesuchte Summe $a + ae + ae^2 \ldots\ldots + ae^{n-1} = s$, so erhält man durch Multiplication derselben mit dem Exponenten der Reihe (e):

$$es = \quad ae + ae^2 + ae^3 \ldots + ae^{n-1} + ae^n,$$

und davon $s = a + ae + ae^2 + ae^3 \ldots + ae^{n-1}$ subtrahirt

$$es - s = -a + ae^n = a(e^n - 1)$$

folglich V. $s = \dfrac{a(e^n - 1)}{e - 1} \left[= \dfrac{a(1 - e^n)}{1 - e}\right].$

Die in dieser Formel liegende Regel in Worten auszudrücken. — B. Nach welchem Satze darf der zweite in [] eingeschlossene Werth dem ersten gleichgesetzt werden, und in welchen Fällen ist seine Gestalt bequemer?

Aus dieser Formel ergeben sich, um a oder n aus den drei übrigen in sie verflochtenen Zahlen zu berechnen, nachstehende:

VI. $a = \dfrac{s(e-1)}{e^n - 1}$ und VII. $n = \dfrac{\log.(s(e-1)+a) - \log.a}{\log.e}$.

Ableitung derselben. — B.

Um aber e zu berechnen, wenn s, a und n gegeben sind müßte man die Gleichung

$$\text{VIII.} \quad ae^n - se = a - s$$

auflösen, was nach den bisher gelehrten Methoden nur so lange angeht, als n nicht größer als 2 ist.

Nimmt man an, das letzte Glied der Reihe, ae^{n-1}, sei auch schon berechnet gegeben, $= u$; so läßt sich der Formel für die Berechnung der Summe durch Einführung dieses Werthes die bequemere Gestalt

$$\text{IX.} \quad s = \frac{eu - a}{e - 1}$$

geben, und aus dieser Formel erhält man ferner

X. $a = eu - s(e-1)$, XI. $u = \dfrac{s(e-1)+a}{e}$ und XII. $e = \dfrac{s-a}{s-u}$

Ableitung dieser Formeln. — B.

Verwickeltere Aufgaben, deren Lösung die Bekanntschaft mit dem Inhalt dieses §. voraussetzt.

1. Anmerk. Ist der Exponent der geometrischen Reihe, e, ein echter Bruch, so kommt der Gesammtbetrag ihrer Glieder $\frac{a(1-e^n)}{1-e}$ dem Werthe $\frac{a}{1-e}$ um so näher, je größer die Zahl derselben n ist, weil um so kleiner e^n ausfällt (§. 69. 3 und am Ende). Denkt man sich also die Glieder der Summe $a + ae + ae^2 + ae^3 \ldots$ ins Unendliche fortgesetzt, so kann in der Voraussetzung, wenn e ein echter Bruch ist, als geschlossener Werth dieser Summe der Bruch $\frac{a}{1-e}$ angenommen werden, wie denn auch durch Entwickelung dieses Quotienten nach §. 11. 9 wieder die ins Unendliche fortlaufende Reihe $a + ae + ae^2 +$ rc. entspringt. Bricht man dieselbe mit dem nten Gliede, ae^{n-1}, ab, so ist der noch fehlende Rest $\frac{ae^n}{1-e}$, und dieser wird um so kleiner, je größer n ist.

Periodische Decimalbrüche können als Summen solcher geometrischer Reihen von unendlicher Gliederzahl nach der vorigen Formel auf geschlossene Bruchformen zurückgeführt werden, z. B.

$$0{,}272727\ldots = \frac{27}{100} + \frac{27}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right) + \frac{27}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \text{rc.}$$
$$= \frac{\frac{27}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11},$$

indem $a = {}^{27}/_{100}$ und $e = {}^{1}/_{100}$ ist. (Vergl. §. 40. Anhang.)

Andere B. — Der Achilles-Schluß.

2. Anmerk. Ist das Anfangsglied der geometrischen Reihe $a = 1$, so sind die folgenden Glieder bloße Potenzen des Exponenten e; die Reihe ist $1, e, e^2, e^3 \ldots$. Jedes Glied steht zum nachfolgenden in dem Verhältniß $1 : e$, so daß jedes spätere als Resultat der Zusammensetzung (§. 55. 17) so vieler diesem gleicher Verhältnisse angesehen werden kann, als sein Exponent Einheiten hat. Die Exponenten stehen in arithmetischer, die zugehörigen Potenzen in geometrischer Progression: jene zählen, der alten Kunstsprache zufolge, wie viel mal das Grundverhältniß $1:e$ sich in diesem zusammengesetzt hat. Werden ferner zwischen zwei benachbarte Glieder der genannten Reihe n neue Glieder eingeschaltet, so bilden die Exponenten derselben eine arithmetische Reihe, deren Differenz $\frac{1}{n+1}$ ist. (Vergl. Nro. 1 dieses §.) Man kann sich vorstellen, das Grundverhältniß $1:e$ sei in die entsprechende Anzahl, $n + 1$, einander gleicher Verhältnisse zerlegt oder aus

denselben zusammengesetzt, und der vorigen Bezeichnung gemäß den Bruch $\frac{1}{n+1}$ als Anzeiger eines solchen Verhältnisses gelten lassen. — Aus dieser ziemlich unbequemen Vorstellungsweise ist der Name **Logarithmen**, = λογων ἀριθμοι = Verhältnißzähler, hervorgegangen, womit man, nach unserer Weise zu reden, die Exponenten eines Systems von Potenzen der nämlichen Grundzahl (hier e) belegt hat. (Vergl. §. 77. 3.)

§. 90.

Die zusammengesetzte Zins- und Renten-Rechnung.

Zur Anwendung der Lehre von den geometrischen Reihen sind ganz vorzüglich geeignet die Aufgaben der sogenannten **zusammengesetzten Zins-** und der **Renten-Rechnung**, und eine kurze Anleitung zur Auflösung der wichtigsten unter ihnen verdient hier um so eher eine Stelle, da dieselben ein großes practisches Interesse darbieten und als Vorbilder vieler ähnlicher Aufgaben dienen können.

1. Bei der **einfachen** Verzinsung eines Capitals bleibt dieses und der Betrag der Zinsen, welche bei einem bestimmten Zinsfuße, d. h. in einem bestimmten Verhältniß zum Capital (3, 4, 5 pro Cent ꝛc.), nach Ablauf eines gewissen Zeitraums, gewöhnlich eines Jahres, erfolgen, für die ganze Dauer der Verzinsung unverändert. Wird aber angenommen, die am Ende jedes Jahres oder eines anderen festgesetzten Zeitraums fälligen Zinsen werden immer mit zum Capital geschlagen und wie dieses verzinset; so sagt man, das Capital trage **zusammengesetzte Zinsen, Zinseszinsen** oder **Zins von Zins***).

Die Hauptaufgabe der zusammengesetzten Zinsrechnung ist die: **den Werth, zu welchem ein Capital mit Zinseszinsen**

---

*) Obgleich es in manchen Fällen gesetzlich verboten ist, bei aufgeschobener Zinsenzahlung Zinseszinsen zu fordern, so würde es doch in manchen Fällen eben so ungerecht als unrichtig sein, sie nicht zuzulassen, und in anderen gebietet die Natur der Aufgabe schlechterdings, dieselben in Rechnung zu bringen.

bei einem bestimmten Zinsfuße nach einer bestimmten Anzahl von Jahren*) anwächst.

Der heutige oder baare Werth des Capitals sei c, das Verhältniß, in welchem ein um den Betrag seiner einjährigen Zinsen vermehrtes Capital zu diesem selbst steht, p (also 1,03, 1,04, 1,05 ꝛc., wenn der Zinsfuß 3, 4, 5 pro Cent ꝛc. ist, und $p - 1$ der Zinsfuß); so wird der Betrag des Capitals nach einem Jahre $= c.p$, am Ende des zweiten Jahres, wo der vorige Werth sich abermals in demselben Verhältniß vermehrt hat, $= (c.p).p = cp^2$, am Ende des dritten Jahres aus demselben Grunde $= (cp^2).p = cp^3$ sein u. s. f. Ueberhaupt also wird das anfängliche Capital mit seinen Zinseszinsen in n Jahren zu dem Betrage

$$\text{I.}\quad C = cp^n$$

angewachsen sein. — Aus dieser Formel lassen sich leicht auch diejenigen ableiten, nach welchen c, p oder n zu berechnen ist, wenn die drei übrigen Bestimmungsstücke gegeben sind.

Ist nämlich der künftige Werth eines Capitals nach n Jahren, bei dem Zinsfuße $p - 1$, $= C$, so ist sein heutiger oder **discontirter** Werth

$$\text{II.}\quad c = \frac{C}{p^n}.$$

Um den Zinsfuß zu bestimmen, bei welchem der heutige Werth eines Capitals c in n Jahren mit Zinseszinsen zu dem Betrage C ansteigt, berechne man zuerst

$$\text{III.}\quad p = \sqrt[n]{\left(\frac{C}{c}\right)},\ \text{woraus sich der Zinsfuß}\ p - 1 = \sqrt[n]{\left(\frac{C}{c}\right)} - 1$$

ergiebt,

und um endlich die Anzahl von Jahren zu finden, während welcher ein Capital c bei dem Zinsfuße $p - 1$ mit Zinseszinsen den Werth C erreicht, dient die Formel

$$\text{IV.}\quad n = \frac{\log.C - \log.c}{\log.p}\quad \text{(Vergl. §. 87.)}.$$

*) Statt jähriger Termine zur Zinszahlung können bei dieser und allen folgenden Aufgaben auch andere Termine von längerer oder kürzerer Dauer angenommen werden. Jene sind nur als die gewöhnlichen und des bequemeren Ausdrucks wegen gewählt.

Die Lösung aller vier Aufgaben ist an bestimmten Beispielen zu üben/ auch solchen, in welchen zwar die Einkleidung eine andere, das Wesen der arithmetischen Beziehungen unter den gegebenen Zahlen aber dasselbe ist, wie z. B:

Der Bestand eines Waldes ist auf 24000 Klafter abgeschätzt, der jährliche Zuwachs durchschnittlich $1\frac{1}{2}$ pro Cent: wie groß ist der Bestand nach 18 Jahren? oder: eine Stadt hat 36500 Einwohner, und auf 1000 Menschen kommen durchschnittlich im Jahre 32 Sterbefälle und 43 Geburten: wie groß ist die Bevölkerung nach 10 und 20 Jahren? — und in wie vielen Jahren wird sich die Bevölkerung eines Landes verdoppelt haben, wenn das Verhältniß der Geburten zu den Sterbefällen das vorige ist, und außerdem auf 1000 Einwohner jährlich im Durchschnitt 12 einwandernde Ansiedler zu rechnen sind? u. s. w.

2. Wird ein mit Zins auf Zins belegtes Capital c am Ende jedes Jahres um eine gewisse Summe r vermehrt oder vermindert, so ist sein Werth, den Zinsfuß $= p - 1$ angenommen, am Ende des

1ten,	2ten,	3ten,	4ten Jahres
$cp \mp r$,	$(cp \mp r)r \mp r$,	$((cp \mp r)p \mp r)p \mp r$,	$(((cp \mp r)p \mp r)p \mp r)p \mp r$
oder $cp \mp r$,	$cp^2 \mp rp \mp r$,	$cp^3 \mp rp^2 \mp rp \mp r$,	$cp^4 \mp rp^3 \mp rp^2 \mp rp \mp r$,

mithin allgemein nach n Jahren

$$\begin{aligned} C' &= cp^n \mp rp^{n-1} \mp rp^{n-2} \ldots \mp rp \mp r \\ &= cp^n \mp r(p^{n-1} + p^{n-2} \ldots + p + 1) \\ &= cp^n \mp r \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1} \qquad \text{(Vergl. §. 89. 2, V.).} \end{aligned}$$

Beispiele mit bestimmten Zahlen. — Ableitung der Formeln, nach welchen c, r oder n zu berechnen wären, wenn die übrigen zu ihrer Bestimmung erforderlichen Stücke gegeben sind. — (Nur p läßt sich aus dieser Gleichung mit Hülfe der bisher entwickelten Methoden der Algebra nicht finden.)

Sollte durch jährliche Wegnahme der Summe r das Capital nebst seinen Zinseszinsen in n Jahren ganz aufgezehrt werden, so müßte $cp^n - r \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1} = 0$,

folglich $c = r \cdot \frac{p^n - 1}{p^n(p-1)}$ und $r = c \cdot \frac{p^n(p-1)}{p^n - 1}$ sein.

B.

3. Jede Geldeinnahme, die regelmäßig zu gewissen, gleich weit aus einander liegenden Zeiten (in bestimmten gleichen Terminen) erfolgt, heißt eine Rente, — eine Jahrrente (Annuität), wenn sie alljährlich erfolgt (Halbjahrrente, Monatsrente ꝛc.

unter den entsprechenden Bedingungen, überhaupt Zeitrente), — eine gewisse Rente, wenn sie nur eine bestimmte Anzahl von Jahren oder anderen Terminen, eine Lebens- oder Leibrente*), wenn sie bis zum Tode des Empfängers, Rentenirers, dauert. Das Capital, für welches man eine Rente erkauft, heißt die Mise.

Der heutige oder Capitalwerth (die Mise) c einer Rente r, die nach einem Jahre zum ersten Male und so n hinter einander folgende Jahre gezahlt werden soll, ist die Summe der auf heute discontirten Werthe aller einzelnen Renten; also den Zinsfuß $= p - 1$ angenommen, ist

$$c = \frac{r}{p} + \frac{r}{p^2} + \frac{r}{p^3} \dots + \frac{r}{p^{n-1}} + \frac{r}{p^n}$$

$$= \frac{r}{p^n}(p^{n-1} + p^{n-2} + p^{n-3} \dots\dots + p + 1)$$

$$\text{I. } c = \frac{r(p^n - 1)}{p^n(p-1)}.$$

Diese Formel ist auch durch unmittelbare Summirung der ersten Reihe (deren Anfangsglied $\frac{r}{p}$ und deren Exponent $\frac{1}{p}$ ist), so wie auch dadurch abzuleiten, daß man zuerst den Werth der Mise und den Werth sämmtlicher Renten zur Zeit der letzten Rentenzahlung berechnet.

Ferner ist auf den Grund der Uebereinstimmung dieser Formel mit der Nro. 2 dieses §. am Ende abgeleiteten aufmerksam zu machen.

Nach welcher Formel würde sich der Capitalwerth einer Rente berechnen, die jetzt gleich zum ersten Male und so fort immer zu Anfange des Jahres zu zahlen wäre?

Um die Größe einer Rente, r, zu bestimmen, deren Capitalwerth (Mise), c, und Dauer, n Jahre oder andere Zeitabschnitte, gegeben sind, den Zinsfuß $= p - 1$ angenommen, dient die aus der vorigen abgeleitete Formel

$$\text{II. } r = c.\frac{p^n(p-1)}{p^n - 1},$$

*) Die Größe einer Leibrente unter gewissen Bedingungen berechnen zu können, muß man eben so gut, wie bei der gewissen Rente, eine bestimmte Dauer derselben annehmen. Diese Bestimmung ergiebt sich aus den sogenannten Sterblichkeitstafeln.

und die Anzahl von Jahren zu bestimmen, während welcher eine Rente zu beziehen ist, wenn auch ihr Capitalwerth und der Zinsfuß gegeben ist, die Formel

$$\text{III.}\quad n = \frac{\log.r - \log.(r - c(p-1))}{\log.p}.$$

Ableitung dieser Formel. — Weßhalb ist p oder p — 1 nicht bestimmt? Zu jeder der drei vorstehenden Formeln ist eine angemessene Zahl von Beispielen auszurechnen.

Welchen Werth hat eine Rente, die nach m Jahren zum ersten Male und dann n auf einander folgende Jahre zu zahlen ist? — B.

Welchen Beitrag hätte man n′ Jahre hindurch alljährlich zu entrichten, um für die darauf folgenden n Jahre die Rente r zu erkaufen? — B.

4. Der heutige Werth einer Rente, welche im ersten Jahre r, im zweiten re, im dritten re^2 beträgt, und in derselben geometrischen Progression bis zum nten Jahre fortschreitet (wo sie demnach re^{n-1} beträgt), ist

$$c' = \frac{r}{p} + \frac{re}{p^2} + \frac{re^2}{p^3} \cdots\cdots + \frac{re^{n-1}}{p^n}$$
$$= \frac{r}{p}\left(1 + \frac{e}{p} + \frac{e^2}{p^2} \cdots\cdots + \frac{e^{n-1}}{p^{n-1}}\right)$$
$$= \frac{r}{p} \cdot \frac{\frac{e^n}{p^n} - 1}{\frac{e}{p} - 1} = r \cdot \frac{e^n - p^n}{p^n(e-p)}.$$

Umgestaltung dieser Formel, so daß r oder n als das Gesuchte erscheint. — B.

5. Der heutige Werth einer Rente, welche im ersten Jahre r, im zweiten 2r, im dritten 3r, und in derselben arithmetischen Progression bis zum nten Jahre fortschreitend, in diesem nr beträgt, ist

$$c'' = \frac{r}{p} + \frac{2r}{p^2} + \frac{3r}{p^3} \cdots\cdots + \frac{(n-1)r}{p^{n-1}} + \frac{nr}{p^n}.$$

Wird nun, um c″ durch einen mehr zusammengezogenen Ausdruck darzustellen, diese Gleichung zuerst mit p^n, alsdann auch mit p^{n-1} multiplicirt, und das zweite Resultat vom ersten abgezogen, so erhält man

$$c''p^n = rp^{n-1} + 2rp^{n-2} + 3rp^{n-3} \ldots + (n-1)rp + nr$$

subtrah. $c''p^{n-1} = \qquad rp^{n-2} + 2rp^{n-3} \ldots + (n-1)r + nrp^{-1}$

$$c''p^{n-1}(p-1) = rp^{n-1} + rp^{n-2} + rp^{n-3} \ldots + rp + r - nrp^{-1}$$

$$= r \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1} - \frac{nr}{p},$$

folglich $\quad c'' = \dfrac{r}{p^{n-1}(p-1)} \cdot \left(\dfrac{p^n - 1}{p - 1} - \dfrac{n}{p}\right).$

B. — Diese Formel kann auch dadurch abgeleitet werden, daß man die Grundgleichung $c'' = \frac{r}{p} +$ ꝛc. durch p dividirt, die dadurch gewonnene von jener subtrahirt, die übrig bleibende Reihe summirt und durch den Coefficienten von c'' dividirt, — oder auch dadurch, daß man den Werth der mit dem 2ten, 3ten, 4ten, überhaupt mit jedem folgenden Jahre neu hinzukommenden, der ersten gleichen Rente, vom Zeitpuncte ihres Eintretens bis zum letzten Termine hin, durch eine getrennt neben den vorigen herlaufende Reihe ausdrückt, alsdann jede dieser Reihen einzeln, und hernach die erhaltenen Summen selbst wieder summirt.

Berichtigungen.

Seite 65 Zeile 16 und 17 von oben. In dem Beispiele rechter Hand ist die letzte und vorletzte Ziffernreihe eine Stelle nach links einzurücken.

S. 77 Z. 7 v. o. statt »aus den unpaaren« lies »aus den paaren und unpaaren«

S. 107 Z. 8 v. u. st. $\frac{19a}{4}$ l. $\frac{19a}{24}$

S. 392 Z. 3 v. o. st. — 4 l. 4

S. 392 Z. 4 v. o. st. 3840 l. — 3840.

Hülfstabelle zur Berechnung **Briggischer** Logarithmen.

№	Exponenten oder Logarithmen.		Potenzen
1	1/2	0,5	3,16227 7660168
2	1/4	0,25	1,77827 9410039
3	1/8	0,125	1,33352 1432162
4	1/16	0,0625	1,15478 198468
5	1/32	0,03125	1,07460 78282
6	1/64	0,01562 5	1,03663 29283
7	1/128	0,00781 25	1,01815 17216
8	1/256	0,00390 625	1,00903 50447
9	1/512	0,00195 3125	1,00450 73641
10	1/1024	0,00097 65625	1,00225 11482
11	1/2048	0,00048 82812	1,00112 49413
12	1/4096	0,00024 41406	1,00056 23125
13	1/8192	0,00012 20703	1,00028 11167
14	1/16384	0,00006 10351	1,00014 05484
15	1/32768	0,00003 05175	1,00007 02717
16	1/65536	0,00001 52587	1,00003 51352
17	1/131072	0,00000 76293	1,00001 75674
18	1/262144	0,00000 38146	1,00000 87836
19	1/524288	0,00000 19073	1,00000 43918
20	1/1048576	0,00000 09536	1,00000 21959
21	1/2097152	0,00000 04768	1,00000 10979
22	1/4194304	0,00000 02384	1,00000 05489
23	1/8388608	0,00000 01192	1,00000 02744
24	1/16777216	0,00000 00596	1,00000 01372
25	1/33554432	0,00000 00298	1,00000 00686
26	1/67108864	0,00000 00149	1,00000 00343
27	1/134217728	0,00000 00074	1,00000 00171
28	1/268435456	0,00000 00037	1,00000 00085
29	1/536870912	0,00000 00018	1,00000 00042
30	1/1073741824	0,00000 00009	1,00000 00021
31	1/2147483648	0,00000 00004	1,00000 00010
32	1/4294967296	0,00000 00002	1,00000 00005
33	1/8589934592	0,00000 00001	1,00000 00002
34	1/17179869184	0,00000 00000	1,00000 00001

Nachricht für den Buchbinder: Dieses Blatt ist dem Buche hinten so anzuheften, daß es ganz herausgeschlagen werden kann.